UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	ME 120 — Innføring i fluidmekanikk.
Eksamensdag:	Mandag, 9. desember 2002.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Rottmann: Matematische Formelsammlung.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

For et to-dimensjonalt strømfelt i x, y-planet er strømfunksjonen $\psi = A \ln\left[\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$ hvor A er en positiv konstant.

a) Finn strømkomponentene u, v henholdsvis i x og y retning.

b) Skisser strømlinjene og angi retningen av strømmen. Hva kaller vi dette feltet?

c) Innfør plane polarkoordinater r, θ og finn uttrykket for strømfunksjonen $\psi(r, \theta)$ og strømkomponentene v_r og v_θ i polarkoordinater. Enhetsvektorene er henholdsvis $\boldsymbol{i}_r$ og $\boldsymbol{i}_\theta$.

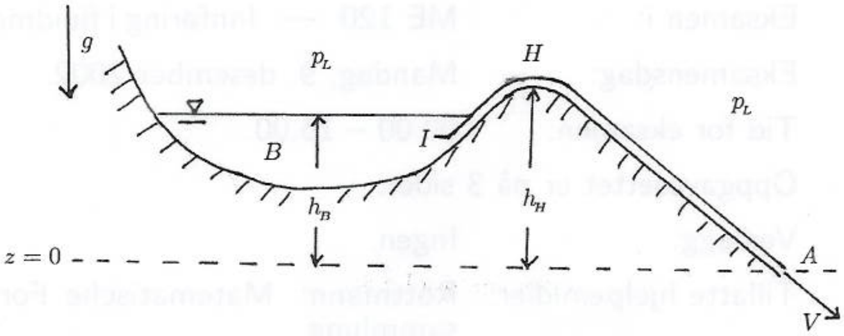
d) Finn akselerasjonen for en væskepartikkel som flyter med feltet. [Hint: $\boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\frac{v_\theta^2}{r}\boldsymbol{i}_r$ når $v_r = 0$ og $v_\theta = v_\theta(r)$.]

Oppgave 2.

a) Skriv opp Bernoullis likning for strøm i en homogen inkompressibel væske og definer alle størrelsene som inngår i likningen. Hvilke betingelser må være oppfylt for at likningen skal gjelde? Bevis for likningen kreves ikke.

(Fortsettes side 2.)

En vannledning fra et stort vannbasseng B går fra innløpet I over en høyde H til tappestedet A. Vannspeilet i bassenget står i en høyde h_B over A og toppen H er i en høyde h_H over A og $h_H > h_B$ (se figur). Lufttrykket er p_L. En pumper ved A til vannet begynner å renne med jevn (stasjonær) fart V gjennom røret. Det forutsettes at en kan se bort fra friksjonsvirkningen i røret. Tyngdens akselerasjon er g.



b) Vis at strømhastigheten i røret er

$$V = \sqrt{2gh_B}$$

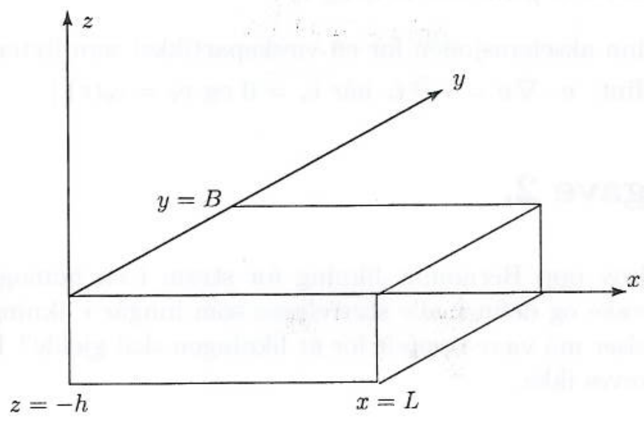
c) Finn trykket i rørets toppunkt H.

d) Hvordan varierer trykket i røret langs den rette skråningen fra H til A?

e) Er det en grense for hvor høy toppen H kan være for at en skal få vannet til å renne i røret?

Oppgave 3.

Et svømmebasseng har konstant dybde h, lengde L og bredde B, med $L > B$. La x-aksen være orientert i lengderetning, y-aksen i bredderetning, og overflaten i $z = 0$ ved likevekt.



(Fortsettes side 3.)

Anta at vannet er homogent, inkompressibelt og friksjonsfritt, og at bevegelsen er virvelfri.

a) Begrunn hvorfor vi kan uttrykke hastigheten med et potensial ϕ.

La overflaten være gitt ved $z = \eta$, la g være tyngdens akselerasjon og la t være tiden.

b) Vis at de lineariserte likningene i vannet og i overflaten er:

$$\nabla^2\phi = 0 \qquad \text{i vannet}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\phi}{\partial z} &= 0 \\ \eta &= -\frac{1}{g}\frac{\partial\phi}{\partial t} \end{aligned}\right\} \qquad \text{i } z = 0$$

c) Skriv ned kinematiske randkrav for de fem flatene i bassenget.

Det er stående bølger i bassenget med overflateform

$$\eta(x, y, t) = a\cos kx\cos \ell y\sin\omega t$$

k, ℓ og ω er konstanter.

d) Vis at hastighetspotensialet ϕ for disse bølgene har formen

$$\phi = \hat{\phi}(z)\cos kx\cos \ell y\cos\omega t$$

og bestem funksjonen $\hat{\phi}(z)$.

e) Finn dispersjonsrelasjonen (relasjonen mellom k, ℓ og ω).

f) Vis at kun et diskret sett av verdier for k, ℓ og ω er tillatt.

I resten av oppgaven kan vi anta at $\ell = 0$.

g) Beskriv hvordan den stående bølgen med lengst periode ser ut.

h) Hvor dypt må bassenget være for at den lengste stående bølgen kan betraktes som en dyptvannsbølge?

i) Hvordan vil et dypt og et grunt basseng skille seg fra hverandre med hensyn til svingeperiode?

SLUTT