MEK4350, høst 2014
Ukesoppgaver 1

Først tre ekstraoppgaver som man kan lese igjennom, men som det ikke er nødvendig å gjøre.

I disse tre oppgavene er f og g og h komplekse vektorer, α og β er komplekse skalarer, $\langle f, g\rangle$ er indreprodukt, og $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$ er normen assosiert med indreproduktet.

Husk kravene for å være indreprodukt:
1) $\langle f, g\rangle = \overline{\langle g, f\rangle}$
2) $\langle \alpha f + \beta g, h\rangle = \alpha\langle f, h\rangle + \beta\langle g, h\rangle$
3) $\langle f, f\rangle \geq 0$
4) $\langle f, f\rangle = 0$ hvis og bare hvis $f = 0$

Husk kravene for å være norm:
1) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$
2) $\|\alpha f\| = |\alpha|\, \|f\|$
3) $\|f\| \geq 0$
4) $\|f\| = 0$ hvis og bare hvis $f = 0$

Oppgave 1 (se seksjon 1.1 i Løw & Winther)

Vis at Cauchy–Schwartz ulikhet gjelder:

$$|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|\, \|g\|$$

Hint: Start med $\langle f - \alpha g, f - \alpha g\rangle \geq 0$, hvor α er en kompleks skalar, sett deretter $\alpha = \langle f, g\rangle/\langle g, g\rangle$.

Oppgave 2

Vis at trekant-ulikheten gjelder for normen $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$:

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

Hint: Start med $\|f + g\|^2 = \langle f + g, f + g\rangle$, husk at realverdien til et komplekst tall er mindre eller lik absoluttverdien til tallet, bruk Cauchy–Schwartz ulikhet og første kvadratsetning.

Oppgave 3 (se teorem 3.1 i Løw & Winther)

Vis at Bessels ulikhet gjelder for en generalisert Fourier rekke, nemlig at dersom dersom vi representerer f ved en projeksjon Pf ned i et underrom spent ut av ortogonale basisvektorer ϕ_n

$$f \sim Pf = \sum_n \hat{f}_n \phi_n \qquad \text{hvor Fourier-koeffisientene er} \quad \hat{f}_n = \langle f, \phi_n\rangle/\|\phi_n\|^2$$

så er

$$\sum_n |\hat{f}_n|^2 \|\phi_n\|^2 \leq \|f\|^2$$

Hint: Start med $\|f - Pf\|^2 = \langle f - Pf, f - Pf\rangle \geq 0$.

Merk: Resultatet gjelder både for et endelig og et uendelig antall ortogonale basisvektorer.

Av følgende oppgaver bør man gjøre 4, minst én av {5,6,7}, minst én av {8,9}, og 10:

Som indreprodukt bruker vi for funksjoner på intervall $a \leq x \leq b$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) g^*(x)\, dx$$

og for tallfølger med indeks $j = \ldots$

$$\langle f, g \rangle = \sum_{j=\ldots} f(j) g^*(j)$$

Undersøk om følgende vektorsett er ortogonale, og regn ut normen av vektorene.

Oppgave 4

Funksjonene $\{1, \cos(nx), \sin(nx); n = 1, 2, \ldots\}$ på intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$.

Oppgave 5

Funksjonene $\{1, \exp(inx); n = 1, 2, \ldots\}$ på intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$.

Oppgave 6

Funksjonene $\{\sin(nx); n = 1, 2, \ldots\}$ på intervallet $0 \leq x \leq \pi$.

Oppgave 7

Funksjonene $\{1, \cos(nx); n = 1, 2, \ldots\}$ på intervallet $0 \leq x \leq \pi$.

Oppgave 8

Tallfølgene $\{\exp \frac{2\pi i n j}{N}; n = 1, 2 \ldots N\}$ for $j = 1, 2, \ldots, N$.

Oppgave 9

Tallfølgene $\{\exp \frac{2\pi i n j}{N}; n = M, M+1 \ldots M+N-1\}$ for $j = J, J+1, \ldots, J+N-1$ hvor M og J er vilkårlige heltall.

Oppgave 10

La $f(x)$ være en 2π-periodisk funksjon definert ved

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \pi \\ 0 & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$

Bruk funksjonene fra oppgave 4, og regn ut Fourier-rekka

$$P_N f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

Plott $f(x)$ og $P_N f(x)$ for $N = 1, 2, 3, 10, 100$ i samme koordinatsystem.