

**MEK4350, høst 2014**  
**Ukesoppgaver 2**

Vi har lært om Dirac delta-funksjon  $\delta(x)$  som er en “generalisert” funksjon med egenskapene

$$\delta(x) = 0 \quad \text{for } x \neq 0$$

og

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x) dx = f(0)$$

hvor  $f(x)$  er en “ordinær” funksjon.

Vi har også lært om Heaviside steg-funksjon  $H(x)$  som er gitt ved

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ 1 & \text{for } x \geq 0 \end{cases}$$

Og vi har lært at  $H'(x) = \delta(x)$ , og vi har lært hvordan vi kan finne  $\delta'(x)$  ved hjelp av delvis integrasjon.

**Oppgave 1**

La funksjonen  $h(x)$  være gitt ved

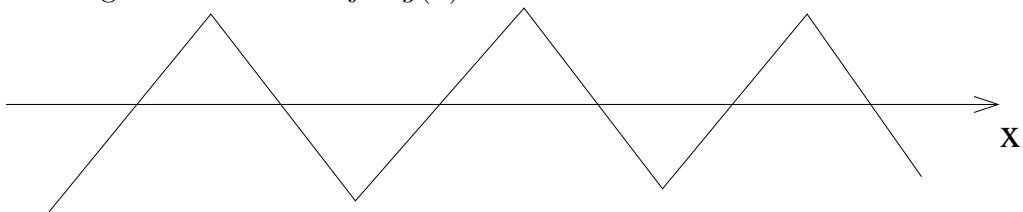
$$h(x) = \begin{cases} h_1 & \text{for } x < a \\ h_2 & \text{for } x \geq a \end{cases}$$

for vilkårlige konstanter  $h_1$ ,  $h_2$  og  $a$ . Regn ut den deriverte  $h'(x)$ .

Hint: Beskriv  $h'(x)$  for  $x \neq a$ , og  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)h'(x) dx$  for en “ordinær” funksjon  $f(x)$ . Bruk delvis integrasjon.

**Oppgave 2**

Her er grafen til en funksjon  $g(x)$ :



Tegn grafene til den førstederiverte  $g'(x)$  og den andrederiverte  $g''(x)$ .

**Oppgave 3**

Regn ut  $\delta''(x)$ .

Hint: Delvis integrasjon to ganger.

## DFT — Diskret Fourier transform

### Oppgave 4

Vi betrakter komplekse tallfølger med  $N$  elementer,  $f_j$  for  $j = 1, 2, \dots, N$ . Definer indre produkt  $\langle f_j, g_j \rangle = \sum_{j=1}^N f_j g_j^*$  og bruk som basis tallfølgene  $\phi_n(j) = e^{\frac{2\pi i n j}{N}}$  for  $n = 1, 2, \dots, N$ . Vi har tidligere vist at  $\phi_n(j)$  er ortogonale. Vi kan nå representere  $f_j$  som

$$f_j = \sum_{n=1}^N \hat{f}_n e^{\frac{2\pi i n j}{N}}$$

Vis at Fourier koeffisientene blir

$$\hat{f}_n = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f_j e^{-\frac{2\pi i n j}{N}}$$

Utled Parsevals likning

$$N \sum_{n=1}^N |\hat{f}_n|^2 = \sum_{j=1}^N |f_j|^2$$

### Oppgave 5

På datamaskinen har vi funksjoner som heter `fft` og `ifft` i systemer slik som Matlab, Octave og Python. Disse er ofte definert på diverse måter

$$f_j = A \sum_{n=1}^N \hat{f}_n e^{\pm \frac{2\pi i n j}{N}}$$

$$\hat{f}_n = B \sum_{j=1}^N f_j e^{\mp \frac{2\pi i n j}{N}}$$

Velg ditt favoritt-system og bestem verdiene til  $A$  og  $B$  og fortegnene for `fft` og `ifft`.

Hint: Sett  $N$  til en liten verdi, f.eks.  $N = 4$ .