MEK4350, høst 2014
Ukesoppgaver 3

Diskret Fourier Transform (DFT) for endelige tallfølger:

$$f_j = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{f}_n e^{\frac{2\pi ijn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{f}_n e^{ik_n x_j}$$

hvor

$$\tilde{f}_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-\frac{2\pi ijn}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-ik_n x_j}$$

Her er det naturlig å tenke seg at $f_j = f(x_j)$ er diskrete sampler av funksjonen $f(x)$ ved **kollokasjonspunktene** $x_j = Lj/N$, og at den diskrete Fourier transformen $\tilde{f}_n = \tilde{f}(k_n)$ er komplekse amplituder ved bølgetallene $k_n = 2\pi n/L$, for funksjoner periodiske over intervallet $0 \leq x \leq L$.

Oppgave 1 — Syklisk permutasjon

La oss tenke oss at de endelige komplekse tallfølgene $\{f_j\}_{j=0}^{N-1}$ og $\{\tilde{f}_n\}_{n=0}^{N-1}$ utvides periodisk til uendelige tallfølger ved at $f_j = f_{j+N}$ og $\tilde{f}_n = \tilde{f}_{n+N}$ for alle j og n. Med syklisk permutasjon menes at vi kan starte med et vilkårlig element med indeks r i disse tallfølgene og telle N etterfølgende elementer, istedenfor å starte med indeks 0.

Vis at for et vilkårlig helt tall r så er

$$f_j = \sum_{n=r}^{r+N-1} \tilde{f}_n e^{\frac{2\pi ijn}{N}}$$

og

$$\tilde{f}_n = \frac{1}{N} \sum_{j=r}^{r+N-1} f_j e^{-\frac{2\pi ijn}{N}}$$

På datamaskinen finnes det en funksjon `fftshift` som utfører en syklisk permutasjon for en bestemt verdi av r. Hvilken verdi av r? Sjekk oppførselen både for like og odde N.

Oppgave 2

Vis at

$$\sum_{j=r}^{r+N-1} e^{\frac{2\pi ijn}{N}} = N \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta_{0,n+lN}$$

hvor r og n er vilkårlige heltall.

Merk: Resultatet er en uendelig rekke av Kronecker deltafunksjoner.

Vis at dersom vi hadde begrenset oss til verdier av n innenfor N etterfølgende verdier, $n = M, M+1, \ldots, M+N-1$, for et vilkårlig heltall M, så står vi kun igjen med én av disse deltafunksjonene.

Oppgave 3 — Folding (engelsk aliasing)

La funksjonen $f(x)$ være periodisk med periode L og ha Fourier-rekke

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{ik_n x}$$

hvor $k_n = 2\pi n/L$ og Fourier-koeffisientene er

$$\hat{f}_n = \frac{1}{L}\int_0^L f(x) e^{-ik_n x}\, dx$$

Vi skal nå sample $f(x)$ i kollokasjonspunktene $x_j = Lj/N$ for $j = 0, 1, \ldots, N-1$. Vi skal representere $f_j \equiv f(x_j)$ ved hjelp av DFT

$$f_j = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{f}_n e^{ik_n x_j}$$

hvor

$$\tilde{f}_n = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f_j e^{-ik_n x_j}$$

Vis at

$$\tilde{f}_n = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \hat{f}_{n+lN}$$

Merk: Den siste formelen beskriver det vi kaller folding eller aliasing. Dette resultatet viser at dersom N er tilstrekkelig stor, samtidig som $\hat{f}_n$ går tilstrekkelig raskt mot null når $n \to \pm\infty$, så vil $\tilde{f}_n$ være omtrent lik $\hat{f}_n$ for indekser n i nærheten av der hvor $|\tilde{f}_n|$ oppnår sitt maksimum.

Oppgave 4 — Interpolasjon med Fourier rekker

Definer vektorene `a = [0 1 0 -1]` og `x = 2*pi*(0:3)/4`.

Vi ser at vektoren `a` kan betraktes som fire sampler av funksjonen $\sin x$ for $x = x_j = \frac{2\pi j}{4}$ for $j = 0, 1, 2, 3$. Studer denne grafen med `plot (x,a)`.

Vi skal nå lage en interpolasjon med 100 punkter, slik at vi setter inn 24 nye punkter etter hvert av de fire som allerede er gitt i vektoren `a`. Vi kan la den interpolerte vektoren med 100 elementer kalles for `aa`, og vi trenger også en ny vektor `xx` med 100 elementer uniformt fordelt på samme intervall.

Vis hvordan vi ved hjelp av én `fft` og én `ifft` kan gjøre denne interpolasjonen.

Følgende kommandoer vil vise om interpolasjonen er riktig:

```
plot (xx,aa)
hold on
plot (x,a,'*')
hold off
```

Hint: Stjernene skal falle nøyaktig på den glatte kurven som representerer én periode av $\sin x$.