MEK4350, høst 2014
Ukesoppgaver 4

I oppgave 1–4 lar vi Fourier-transformen være

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} \, dx$$

for funksjoner på uendelig intervall, og

$$\hat{f}(k_n) \equiv \hat{f}_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(x) e^{-ik_n x} \, dx \qquad \text{med} \qquad k_n = \frac{2\pi n}{L}$$

for funksjoner på endelig intervall $0 \leq x \leq L$

Oppgave 1

Vis at dersom $f(x)$ er reell så er $\hat{f}(k) = \hat{f}^*(-k)$.

Oppgave 2

Vis at Fourier transformen til $\exp(ik_0 x) f(x)$ er lik $\hat{f}(k - k_0)$.

Oppgave 3

Vis at Fourier-transformen til $\dfrac{d^m f(x)}{dx^m}$ er $(ik)^m \hat{f}(k)$, på betingelse av at enten er grensen $\dfrac{d^j f(x)}{dx^j} \to 0$ oppfylt når $x \to \pm\infty$ for alle $j < m$, eller så er $\dfrac{d^j f(x)}{dx^j}$ periodisk over det endelige intervallet for alle $j < m$.

Konvolusjon

Konvolusjonen $f(x) * g(x)$ av to funksjoner $f(x)$ og $g(x)$ er definert som

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x - y) \, dy$$

for funksjoner på uendelig intervall, og

$$f(x) * g(x) = \int_0^L f(y) g(x - y) \, dy$$

for funksjoner på endelig intervall $0 \leq x \leq L$. I det siste tilfellet gjør det ikke noe at argumentet til g ender opp utenfor intervallet $0 \leq x \leq L$ fordi vi antar at funksjonene f og g gjentar seg periodisk utenfor intervallet.

Oppgave 4

Vis at Fourier-transformen til konvolusjonen $f(x) * g(x)$ er proporsjonal med $\hat{f}(k)\hat{g}(k)$.

Asymptotisk oppførsel til Fourier-koeffisienter

Oppgave 5

Vis at dersom vi tegner grafen til $y = ax^b$ i dobbelt logaritmisk koordinatsystem, så vil resultatet bli ei rett linje, og verdiene til a og b kan bestemmes av henholdsvis skjæringspunktet med andre akse og stigningstallet til linja.

Velg passende verdier for a og b og demonstrer at dette faktisk fungerer ved å tegne grafen på datamaskin med både `plot(x,y)` og `loglog(x,y)`.

Oppgave 6

Vi skal nå se på de tre funksjonene

$$f(x) = x \qquad g(x) = |x - \pi| \qquad h(x) = \cos(x) \qquad \text{for } 0 \leq x < 2\pi$$

a) Tegn grafene til de tre funksjonene og forklar hvor fort Fourier-koeffisientene $\hat{f}_n$, $\hat{g}_n$ og $\hat{h}_n$ forventes å gå mot null når $n \to \pm\infty$.

Vi skal nå bruke datamaskin for å vise at forventningen fra deloppgave a er riktig. Først må x diskretiseres med N verdier $x_j = 2\pi j/N$ med lik innbyrdes avstand. Deretter skal Fourier-koeffisientene beregnes ved hjelp av `fft(y)`, hvor y_j er den aktuelle funksjonen beregnet i x_j. Til slutt tegner vi `abs(fft(y))` i dobbelt logaritmisk koordinatsystem.

b) Forklar hvorfor kommandoen `x = linspace(0,2*pi,N)` ikke blir riktig, og vis hvordan det må gjøres for å bli riktig.

c) Bruk `plot` for å tegne grafene til `abs(fft(y))` for de tre funksjonene i samme lineære koordinatsystem. Tegn også grafene til `abs(fftshift(fft(y)))` i samme lineære koordinatsystem. Forklar hvorfor vi bare trenger å studere halvparten av Fourier-transformen (se oppgave 1 i dette oppgavesettet).

d) Bruk `loglog` for å tegne grafene til ϵ+`abs(fft(y))` i samme dobbelt-logaritmiske koordinatsystem. Tegn i tillegg inn to rette linjer, med de forventede stigningstallene som burde gjelde for funksjonene f og g (se deloppgave a). Vis at du oppnår forventet resultat for alle de tre funksjonene!

Hint 1: Konstanten ϵ er tatt med her for å unngå at datamaskinen skal klage på å ta logaritmen til ikke-positive tall. En brukbar verdi kan være $\epsilon = 10^{-15}$.

Hint 2: For å unngå aliasing må N velges tilstrekkelig stor, $N = 1000$ er antakelig tilstrekkelig.

e) Vis at dersom vi begår den feilen som er antydet i deloppgave b, så ødelegger vi den fine oppførselen til $\hat{h}$.