MEK4350, høst 2014
Ukesoppgaver 5

Oppgave 1 — Beregne derivert ved hjelp av Fourier transform.

I oppgave 4 i Ukesoppgaver 3 definerte vi `a = [0 1 0 -1]` og `x = 2*pi*(0:3)/4`, og betraktet dette som en grov representasjon av $\sin x$ på intervallet $0 \leq x < 2\pi$.

I oppgave 3 i Ukesoppgaver 4 lærte vi hvordan vi kan derivere en funksjon ved å utføre en multiplikasjon av den Fourier-transformerte.

Vi skal nå regne ut den deriverte av `a` med hensyn på `x` slik: Beregn Fourier transformen `aft = ifft(a)`, multipliser `aft` i henhold til oppskriften fra Ukesoppgaver 4 for å få den Fourier-transformerte `daft`, beregn invers-transformen `da = fft(daf)`, og tegn opp i samme koordinatsystem

```
plot (x,a,'*')
hold on
plot (x,da,'o')
```

Sjekk at vi har beregnet den deriverte eksakt i de fire kollokasjonspunktene.

Nå skal vi gjøre nøyaktig det samme med interpolasjonen: I Ukesoppgaver 3 lagde vi den interpolerte `aa` med 100 elementer, finn den deriverte `daa` via den Fourier-transformerte `daaft`, og tegn opp i samme koordinatsystem

```
plot (xx,aa,'r')
plot (xx,daa,'b')
```

Sjekk at stjernene faller nøyaktig på den glatte røde kurven som representerer én periode av $\sin x$, og at sirklene faller nøyaktig på den glatte blå kurven som representerer én periode av $\cos x$.

Oppgave 2 — Nyttårsbølgen

Les artikkelen til Sverre Haver om "Nyttårsbølgen".

Last deretter ned den målte tidsserien.[1] Tidsserien har like tidsintervaller over total lengde på 20 minutter. Det som er målt er vertikal avstand mellom et måleinstrument og havoverflaten.

Reproduser grafene i figur 4 og 5 i artikkelen til Sverre Haver. Bruk sekund som enhet for tid langs første akse, meter som enhet for amplitude langs andre akse, og sørg for at null-nivå langs andre akse er middelvannstand.

[1] Statoil gjorde dette unike datasettet tilgjengelig for akademiske miljøer. Resultatet ble et skred av forskning om freake bølger.

Oppgave 3 — Interpolasjon av Nyttårsbølgen med Fourier rekke

I oppgave 1 er kurvene helt sikkert framkommet ved lineær interpolasjon mellom de diskrete målepunktene. Da vil den største amplituden som tegnes være lik den største amplituden som ble målt og forekomme ved et diskret måletidspunkt. Kan det tenkes at kammen og bukene rundt Nyttårsbølgen i virkeligheten forekom mellom to diskrete måletidspunkter?

For å svare på dette spørsmålet kan vi forsøke en interpolasjon ved hjelp av Fourier-rekke. Først regner vi ut DFT av tidsserien

$$\tilde{\eta}_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \eta_j e^{i\omega_n t_j}$$

hvor $\eta_j = \eta(t_j)$ er de diskrete målingene ved tidspunktene $t_j = Tj/N$ for $j = 0, 1, 2, \ldots, N-1$. Her er $T = 20$ minutter og N er antall målinger. Vinkelfrekvensene er $\omega_n = 2\pi n/T$. Legg merke til at for Fourier transform med hensyn på tid er det her bevisst satt $+$ i eksponenten, som er motsatt fortegnsvalg enn det vi har brukt for transform med hensyn på rom.

Fra formelen for invers transform med vilkårlig syklisk permutasjon

$$\eta(t_j) = \sum_{n=r}^{r+N-1} \tilde{\eta}_n e^{-i\omega_n t_j}$$

kan vi tenke oss en interpolasjon for vilkårlig t

$$\eta(t) = \sum_{n=r}^{r+N-1} \tilde{\eta}_n e^{-i\omega_n t}$$

Spørsmål: En optimal verdi for r må være slik at det blir minst mulig "ekstra" oscillasjoner i interpolasjonen $\eta(t)$. Hilken verdi ar r er det?

For å gjøre dette på datamaskin utvider vi antall punkter i DFT. La det nye antall punkter være $M \gg N$. De nye tidene blir $\tau_l = Tl/M$ for $l = 0, 1, 2, \ldots, M-1$. Vi kan definere de nye Fourier-koeffisientene ved

$$\tilde{f}_m = \begin{cases} \tilde{\eta}_m & \text{for } |m| < N/2 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

og interpolasjonen blir

$$\eta(\tau_l) = \sum_{m=0}^{M-1} \tilde{f}_m e^{-i\omega_m \tau_l}$$

Oppgave: Finn ut om slik interpolasjon tilsier at høyeste kam var høyere, og nærliggende buker var lavere, enn de målingene som ble gjort.

Oppgave 4 — Hvor glatt er havoverflaten?

Glattheten til havoverflaten kan studeres ved å se på hvor fort Fourier-koeffisientene går mot null.

a) Plott $|\tilde{\eta}_n|$ mot ω_n i dobbelt logaritmisk koordinatsystem. Plott inn noen rette linjer med diverse stigningstall. Klarer du å identifisere hva som er et karakteristisk stigningstall (dvs. potens av ω) for hvor fort Fourier koeffisientene går mot null?

b) Ofte gjør man slik betrakting for bølgespektrum, som er relatert til $|\tilde{\eta}_n|^2$ istedenfor $|\tilde{\eta}_n|$. Forklar hvordan stigningstallet til $|\tilde{\eta}_n|^2$ er relatert til stigningstallet til $|\tilde{\eta}_n|$.

Hint 1: Det er ikke sikkert at potensen av ω er et helt tall.

Hint 2: Vi kan begrense oss til halvparten av Fourier transformen fordi η er reell.

Hint 3: Grafen til Fourier-transformen er karakterisert ved et område nær origo som synker, og et område lengre vekk fra origo som flater ut og som skyldes måleunøyaktighet og avrundingsfeil i tidsserien. Vi er kun interessert i den synkende delen nær origo.