MEK4350, høst 2014
Ukesoppgaver 6

Vi har lært at dersom X er en stokastisk variabel, og $F(x)$ er den kumulative fordelingsfunksjonen for X, så er sannsynlighetstetthetsfunksjonen gitt ved

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x},$$

moden (eller typetallet) er den verdien for x hvor $f(x)$ har sitt maksium, medianen er den verdien for x hvor $F(x) = 0.5$, middelverdien (eller forventningen) er

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx,$$

variansen er

$$\sigma^2 = E[(X-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)\, dx,$$

standardavviket er

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

skjevheten er

$$\gamma = \frac{E[(X-\mu)^3]}{\sigma^3}$$

og kurtosen er

$$\kappa = \frac{E[(X-\mu)^4]}{\sigma^4}$$

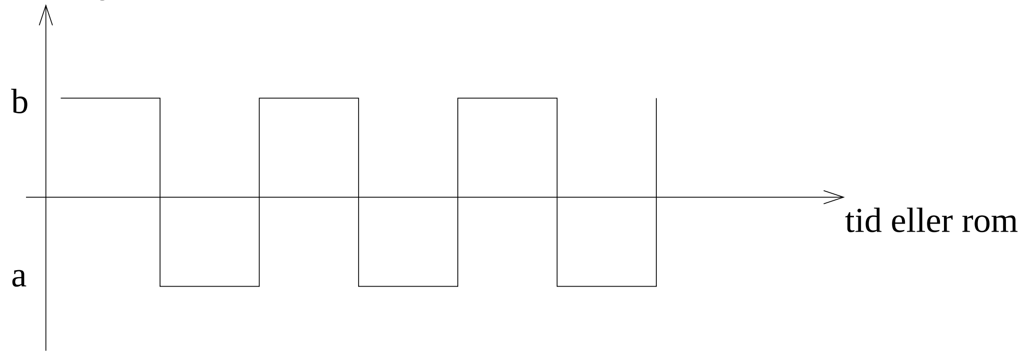
Vi skal regne ut alle disse størrelsene for noen viktige sannsynlighetsfordelinger. Noen av disse fordelingene er så viktige at vi bør kunne dem på rams. Legg spesielt merke til hvilke av disse som har kurtose mindre enn, lik eller større enn 3.

Oppgave 1: Kaste mynt og krone.

La utfall "mynt" ha verdi a og utfall "krone" ha verdi b.

$$f(x) = \frac{\delta(x-a) + \delta(x-b)}{2}$$

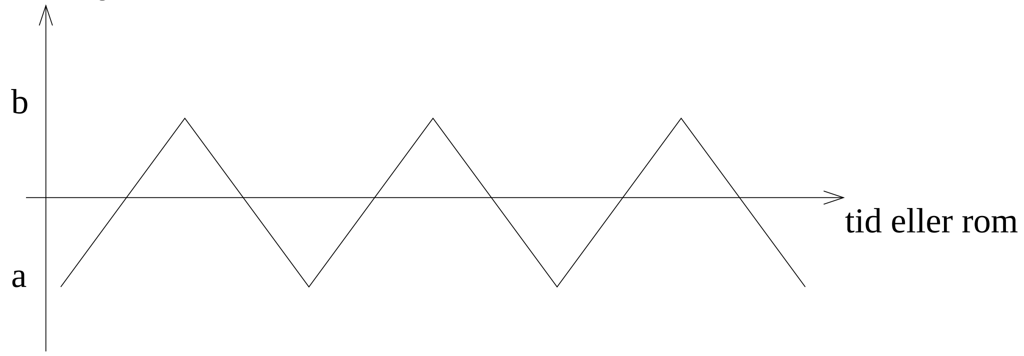
Overbevis deg om at dette er sannsynlighetstettheten for overflatehevningen til denne bølgen:



Oppgave 2: Uniform fordeling mellom a og b, for $a < b$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{for} \quad a \le x \le b \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

Overbevis deg om at dette er sannsynlighetstettheten for overflatehevningen til denne bølgen:



Oppgave 3: Normal eller Gauss fordeling $N(\mu, \sigma)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Ekstraoppgaver dersom man vil øve seg enda mer:

Oppgave 4: Eksponentiell fordeling

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} H(x)$$

Merk: Vi har brukt Heaviside steg funksjon for å skrive formelen på kompakt måte, slik at vi har $f(x) = 0$ for negativ x.

Oppgave 5: Rayleigh fordeling

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} H(x)$$

Merk 1: Vi har brukt Heaviside steg funksjon for å skrive formelen på kompakt måte, slik at vi har $f(x) = 0$ for negativ x.

Merk 2: I standarduttrykket for Rayleigh fordelingen brukes parameteren σ som i dette tilfellet ikke er standardavviket til X.