STK-IN1050 - Statistikk for informatikere

4. Sannsynligheter: sentrale begreper og konsepter

Thordis L. Thorarinsdottir

2026-01-28

Sannsynligheter

- Hvordan kan tilfeldige fenomener beskrives matematisk?
- Hvilke beregningsregler gjelder for sannsynligheter?
- Hvordan kan stokastisk uavhengighet mellom hendelser og betingede sannsynligheter karakteriseres matematisk?

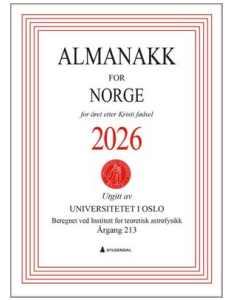
Deterministiske vs. tilfeldige fenomener

Mange fysiske lover kan beskrives deterministisk.

Almanakk for Norge viser:
- når det er fullmåne
- når det er soloppgang og solnedgang

Det er mulig siden astronomene kan gi en matematisk beskrivelse av himmellegemenes bevegelser.

De kan også regne ut når vi vil få solformørkelse.



Fullmåne, soloppgang/nedgang og solformørkelse kan forutsies. De er **determinstiske** fenomener.

Deterministiske vs. tilfeldige fenomener

I mer komplekse prosesser som terningkast kan ikke utfallet forutsies (eller bare med store vanskeligheter), så resultatet anses som **tilfeldig**.

Men: selv tilfeldige fenomener har regelmessigheter og mønstre.

- For eksempel forventer vi at med en rettferdig terning vil alle tall dukke opp med omtrent lik frekvens på lang sikt.

Sannsynlighetsteori gir oss verktøy for matematisk beskrivelse av tilfeldige hendelser.

Tilfeldighet ≠ kaos

I et **kaotisk** system virker den tidsmessige utviklingen av et fenomen uforutsigbar, selv om den faktisk styres av deterministiske regler.

- Eksempel: Bevegelsen til en planet i et solsystem med tre soler («trelegemeproblemet»)

Det kan derfor være vanskelig å skille presist mellom deterministiske, kaotiske og tilfeldige fenomener.

Tilfeldighet vs. usikkerhet

I et tilfeldig eksperiment kastes en rettferdig terning fra et terningbeger.

- **Tilfeldighet**: Utfallet er uforutsigbart før eksperimentet, men sannsynligheter kan tilordnes de mulige utfallene.
- **Usikkerhet**: Eksperimentet er utført, men begeret er ennå ikke løftet.

$\Rightarrow$ Utfallet er allerede bestemt, men fortsatt ukjent.

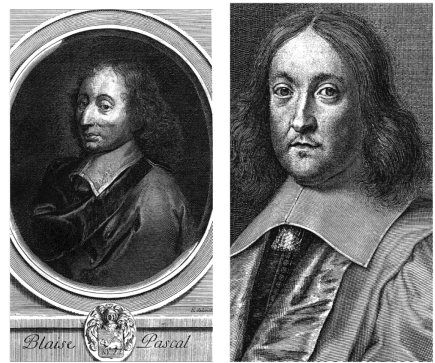
$\Rightarrow$ Usikkerheten om utfallet kan beskrives ved hjelp av sannsynligheter.

Litt historikk

Menneskene har hatt terninger i tusenvis av år.

Terningkast og loddtrekning ble brukt for å komme fram til riktig avgjørelse på et vanskelig problem. Avgjørelsen ble da overlatt til høyere makter.

Det historiske gjennom-bruddet for sannsynlighets-regningen kom først i 1654 i en brevveksling mellom Pascal og Fermat om noen problemer knyttet til spill.



Blaise Pascal (1623-1662) til venstre og Pierre de Fermat (1601-1665) til høyre.

Kilde: www.york.ac.uk/depts/maths/histstat

Litt historikk

Pascal og Fermat var særlig interessert i delingsproblemet («problem of points»):

To spillere legger 50 kr hver i en pott. Spillerne kaster ett kronestykke flere ganger. Hvis det blir krone får spiller A ett poeng, hvis det blir mynt får spiller B ett poeng. Førstemann til 10 poeng vinner hele potten.

Spillet må imidlertid avbrytes når spiller A har fått 8 poeng og spiller B har fått 7 poeng. Hvordan skal de dele potten?

Utfall og utfallsrom

Generelt er resultatet av et stokastisk forsøk ikke gitt på forhånd. Men vi kan angi de mulige resultatene, eller **utfallene** for forsøket.

Mengden av alle utfall kaller vi **utfallsrommet** Ω.

Utfall og utfallsrom

Eksempel 1: Når vi kaster en terning vet vi ikke hvor mange øyne vi vil få.

Men vi vet at antall øyne vil bli 1, 2, 3, 4, 5 eller 6.

Utfallsrommet er $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Eksempel 2: Kast et kronestykke til første gang du får «mynt».

Utfallsrom: $\Omega = \{M, KM, KKM, KKKM, KKKKM, \ldots\}$.

Eksempel 3: Registrer vekten til en nyfødt jente.

Kan ikke her liste opp alle mulige fødselsvekter.

Utfallsrommet er er intervall på tallinja, for eksempel $\Omega = (0, 7)$.

Utfall og utfallsrom

I eksempel 1 er utfallsrommet **endelig**, mens det er **tellbart uendelig** i eksempel 2.

En fellesbetegnelse for disse to situasjonene er at utfallsrommet er **diskret**.

I eksempel 3 er utfallsrommet **kontinuerlig**.

Begivenheter

Vi vil ofte være interessert i et resultat av et forsøk som svarer til flere utfall.

Et resultat av et forsøk som svarer til ett eller flere utfall kaller vi en **begivenhet** (**hendelse**).

Begivenheter

Eksempel 1 (forts): Ved terningkast kan vi være interessert i om vi får minst fem øyne.

Begivenheten A = «minst fem øyne» kan vi skrive $A = \{5, 6\}$.

Eksempel 2 (forts): Kast kronestykke til første mynt.

A = «høyst tre kast» = $\{M, KM, KKM\}$

B = «minst tre kast» = $\{KKM, KKKM, KKKKM, \dots\}$

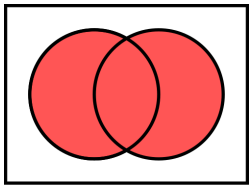
Eksempel 3 (forts): Registrer vekten til en nyfødt jente.

A = «veier mellom 3 kg og 4 kg» = $(3, 4)$.

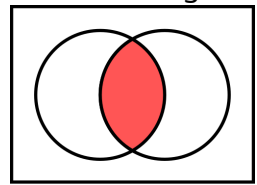
Union og snitt

La A og B være to begivenheter ved et forsøk. Ut fra disse kan vi lage to nye begivenheter:

$A \cup B$ («A **union** B») omfatter alle utfall som er med i A eller i B eller i begge:



$A \cap B$ («A **snitt** B») omfatter alle utfall som er med i både A og B:



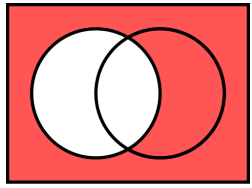
Hvis det ikke fins noen utfall som er med i både A og B (dvs. $A \cap B = \emptyset$) er begivenhetene **disjunkte**. Hvis alle utfall i A er også i B (dvs. $A \cap B = A$), så er A **delmengde** i B og vi skriver $A \subseteq B$.

Komplementære begivenheter

La A være en begivenhet ved et forsøk.

Det at A ikke inntreffer er en begivenhet vi kaller «**ikke** A» og skriver A^C.

A^C inneholder alle utfall som ikke er med i A:



A og A^C er **komplementære** begivenheter.

Merk at A og A^C er disjunkte.

Det klassiske sannsynlighetsbegrepet

De første arbeidene om sannsynlighet var om problemer i spill, og sannsynlighetsbegrepet de brukte var tilpasset dette.

Et enkelt eksempel illustrerer tankegangen:

- Vi kaster en terning.
- Hva er sannsynligheten for at vi får minst fem øyne?

Alle sidene på terningen har samme sannsynlighet for å vende opp når terningen kastes.

Sannsynligheten er lik 1 for at en eller annen side vil vende opp.

Derfor er sannsynligheten 1/6 for hver av de seks utfallene 1, 2, 3, 4, 5 og 6.

Begivenheten «minst fem øyne» består av de to utfallene 5 og 6.

Sannsynligheten for minst fem øyne er derfor 2/6 = 1/3.

Generell formulering

Et stokastisk forsøk har N **mulige utfall**.

Vi antar at de N utfallene er like sannsynlige.

Da har hvert utfall sannsynlighet $1/N$.

En begivenhet A består av $N(A)$ utfall.

Det er de **gunstige utfallene** for begivenheten A.

Sannsynligheten for begivenheten A er

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{\text{antall gunstige utfall}}{\text{antall mulige utfall}}.$$

Sannsynlighet og relativ frekvens

Vi kan ikke forutsi resultatet av ett stokastisk forsøk, men vi ser et mønster når det gjentas mange ganger.

Eksempel 4: Vi trekker fem tilfeldige sifre mellom 0 og 9.

> Vi er interessert i sannsynligheten for at hverken 0 eller 1 er blant de fem sifrene.

Sannsynlighet og relativ frekvens

```python
import random

population = range(0, 10)
sample_size = 5
n_sim = 10000
count_neither_0_nor_1 = 0

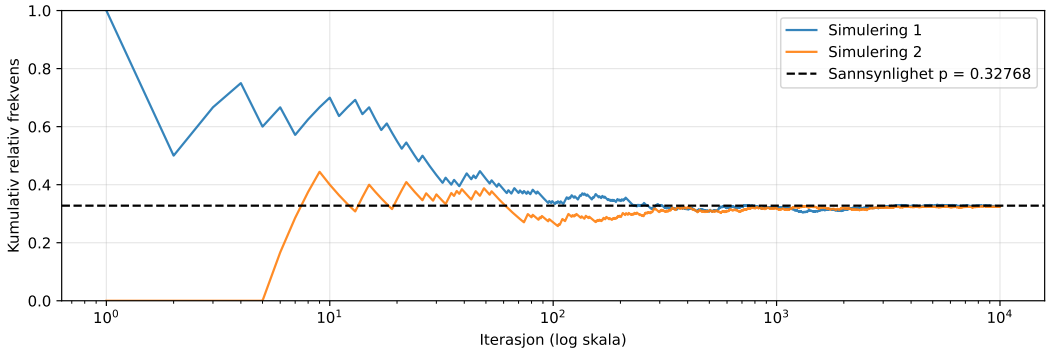
for _ in range(n_sim):
    # sample with replacement
    sample = random.choices(population, k=sample_size)
    # check that neither 0 nor 1 appears in the sample
    if (0 not in sample) and (1 not in sample):
        count_neither_0_nor_1 += 1

relative_frequency = count_neither_0_nor_1 / n_sim
```

```
Simuleringer: 10000
Observert antall (hverken 0 eller 1): 3237
Observert relativ frekvens: 0.323700
```

Sannsynlighet og relativ frekvens

Vi kan også følge hvordan den observerte relative frekvensen endres hver gang vi trekker fem nye sifre og dermed får mer informasjon:



Sannsynlighet og relativ frekvens

Vi kan også beregne sannsynligheten direkte:

- Det er 10 måter å velge første siffer på og 10 måter å velge hvert påfølgende siffer på, eller 10^5 måter å velge fem sifre på.
- Tenk nå på hendelsen A = «verken 0 eller 1 vises».
- For det første sifferet er det åtte måter vi kan velge et siffer som verken er 0 eller 1, og det samme for de påfølgende fire sifrene.
- Dermed har vi totalt 8^5 måter å velge fem sifre der verken 0 eller 1 vises.
- Sannsynligheten for å velge fem sifre der verken 0 eller 1 vises er dermed

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{8^5}{10^5} = 0,32768.$$

Sannsynlighet og relativ frekvens

Generelt gjelder:

Vi er interessert i en begivenhet A i et stokastisk forsøk. Forsøket gjentas under like betingelser. Da vil den relative frekvensen av A nærme seg en grenseverdi når forsøket gjentas mange ganger. Denne grenseverdien er sannsynligheten $P(A)$.

Sannsynlighet er relativ frekvens «i det lange løp».

Objektiv vs. subjektiv sannsynlighet

Sannsynlighet forstått som relativ frekvens i det lange løp kalles enkelte ganger **objektiv sannsynlighet**.

Merk at denne forståelsen av sannsynlighet forutsetter at forsøket kan gjentas flere ganger under like betingelser.

Noen ganger brukes sannsynlighetsbegrepet i situasjoner hvor forsøket ikke kan gjentas under like betingelser.

«Det er minst 50% sjanse for at vi klarer å reise til Mars i løpet av dette tiåret!».

Sannsynlighet som uttrykker en personlig vurdering kalles **subjektiv sannsynlighet**.

Aksiomer for sannsynlighet

Vi kan ikke bruke fortolkningen av sannsynlighet som relativ frekvens i det lange løp til å lage en matematisk teori for sannsynlighet.

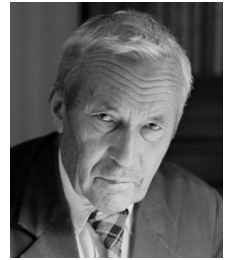
For å lage en matematisk teori for sannsynlighet, tar vi utgangspunkt i noen aksiomer som sannsynligheter må oppfylle.

Aksiomene er motivert ut fra det klassiske sannsynlighetsbegrepet og fortolkningen av sannsynlighet som relativ frekvens i det lange løp.

Kolmogorovs aksiomer (Andrey Kolmogorov, 1933)

Aksiom 1: For enhver begivenhet A er $P(A) \geq 0$.
Aksiom 2: For utfallsrommet Ω er $P(\Omega) = 1$.
Aksiom 3: Hvis $A_1, A_2, A_3, \ldots$ er en uendelig følge av disjunkte begivenheter, så er

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$



Andrey Kolmogorov (1903-1987)

Kilde: https://mathigon.org/

Aksiomene sier ikke noe om hvilke verdier sannsynlighetene skal ha i en gitt situasjon. For å angi konkrete verdier for sannsynlighetene, må vi bruke kunnskaper om den situasjonen vi studerer.

Med utgangspunkt i aksiomene, kan vi utlede regler for å regne med sannsynligheter.

Regneregler for sannsynligheter

(a) $P(\emptyset) = 0$;
(b) $P(A) \leq 1$;
(c) $P(A^C) = 1 - P(A)$ og $P(A) = 1 - P(A^C)$;
(d) Hvis $A_1 \subseteq A_2$, så er $P(A_1) \leq P(A_2)$;
(e) Hvis A_1 og A_2 er disjunkte, så er $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$;
(f) $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$;
(g) $P(A_1 \cup A_2) \leq P(A_1) + P(A_2)$.

Regler vi bruker ofte:

(c) $P(A) = 1 - P(A^C)$

(f) $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$

A1: $P(A) \geq 0$;
A2: $P(\Omega) = 1$;
A3: $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ hvis $A_1, A_2, A_3, \ldots$ disjunkt.

Vi ønsker å vise at da gjelder også $P(\emptyset) = 0$.

A1: $P(A) \geq 0$;
A2: $P(\Omega) = 1$;
A3: $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ hvis $A_1, A_2, A_3, \ldots$ disjunkt.

Vi ønsker å vise at da gjelder også $P(A^C) = 1 - P(A)$, $P(A) = 1 - P(A^C)$ og $P(A) \leq 1$.