5. Sannsynlighetsberegninger

Permutasjonsmønstre (Eksempel 2)

Vi har totalt $n!$ permutasjoner.

For å ha "1 2" et eller annet sted i rekkefølgen:

- 1 kan plasseres på $n-1$ måte (ikke sist)
- 2 kan plasseres på 1 måte (etter 1)
- 3, ..., n kan plasseres på $(n-2)!$ måter

Altså

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{(n-1)\,1\,(n-2)!}{n!} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

Hvis $n = 10$, så er $P(A) = 0.1$.

Bilnummer (Eksempel 1)

20 valg for bokstav
9 valg for første siffer
10 valg for de andre 4 sifrene:

$$20 \times 20 \times 9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 36\,000\,000$$

forskjellige bilnummer.

Kort i to bunker (eksempel 3)

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$$

$$P(B|A_1) = \frac{6}{15}$$

$$P(B|A_2) = \frac{1}{15}$$

Bayes' setning gir

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1)P(A_1)}{P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2)}$$

$$= \frac{\frac{6}{15} \times \frac{1}{2}}{\frac{6}{15} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{15} \times \frac{1}{2}} = \frac{6}{7}.$$

Uavhengighet

A og B uavhengig hvis og kun hvis

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Bevis:

Uavhengighet $\Rightarrow$ $P(A \cap B) = P(A)P(B)$:

$$P(A \cap B) = \underbrace{P(A|B)}_{= P(A) \text{ dersom } A,B \text{ uavhengig}} P(B) = P(A)P(B)$$

$P(A \cap B) = P(A)P(B) \Rightarrow$ uavhengighet:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A).$$

- $\frac{P(A \cap B)}{P(B)}$: definisjon av betinget sannsynlighet
- $\frac{P(A)P(B)}{P(B)}$: påstand

Bayes' setning

$$P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)\,P(A_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(B|A_i)\,P(A_i)}$$

Bevis: Vi har (ifølge definisjonen av betinget sannsynlighet)

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} \quad \text{og} \quad P(B|A_j) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(A_j)}$$

$$\Rightarrow P(A_j \cap B) = P(A_j|B)\,P(B) \quad \text{og} \quad P(A_j \cap B) = P(B|A_j)\,P(A_j)$$

$$\Rightarrow P(A_j|B)\,P(B) = P(B|A_j)\,P(A_j)$$

$$\Rightarrow P(A_j|B) = \frac{P(B|A_j)\,P(A_j)}{P(B)}$$

I tillegg har vi (fra setningen om total sannsynlighet):

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{k} P(B|A_i)\,P(A_i) \quad \blacksquare$$

Samtaler til et callsenter

X = samtalevarighet for innkommende samtaler til et callsenter (i sekunder)

$$f(x) = \begin{cases} 0.006\, e^{-0.006x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx} e^{ax} = \frac{1}{a} e^{ax}$$

Er f en tetthet?

(i) $f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$ ✓

(ii) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{+\infty} 0.006\, e^{-0.006x}\,dx$$

$$= 0 + \left[\frac{0.006}{-0.006}\, e^{-0.006x}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \left[-e^{-0.006 \cdot \infty}\right] - \left[-e^{-0.006 \cdot 0}\right]$$

$$= 0 - (-1)$$

$$= 1$$ ✓

Fordelingsfunksjon:

$$F(x) = \int_0^x f(z)\,dz = \int_0^x 0.006\, e^{-0.006z}\,dz = \left[-e^{-0.006z}\right]_0^x$$

$$= -e^{-0.006x} - (-e^0) = 1 - e^{-0.006x}$$

Dvs.

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-0.006x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$