STK-IN1050 - Statistikk for informatikere

5. Sannsynlighetsberegninger

Matematisk institutt

2026-02-02

Sannsynligheter

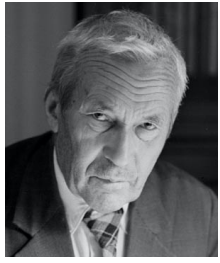
- Hvordan kan tilfeldige fenomener beskrives matematisk?
- Hvilke beregningsregler gjelder for sannsynligheter?
- Hvordan kan stokastisk uavhengighet mellom hendelser og betingede sannsynligheter karakteriseres matematisk?

Aksiomer for sannsynlighet

Kolmogorovs aksiomer (Andrey Kolmogorov, 1933)

Aksiom 1: For enhver begivenhet A er $P(A) \geq 0$.
Aksiom 2: For utfallsrommet Ω er $P(\Omega) = 1$.
Aksiom 3: Hvis $A_1, A_2, A_3, \ldots$ er en uendelig følge av disjunkte begivenheter, så er

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$



Andrey Kolmogorov (1903-1987)

Kilde: https://mathigon.org/

Sannsynligheter for diskrete utfallsrom

Anta at utfallsrommet er diskret: $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, \ldots\}$. Det kan vises at vi får sannsynligheter som tilfredsstiller aksiomene ved å angi en sannsynlighet til hvert utfall E_i slik at

$$P(E_i) \geq 0$$
$$\sum_i P(E_i) = 1.$$

Videre finner vi sannsynligheten for en begivenhet A ved å legge sammen sannsynligheten for alle utfallene som er med i A, dvs.

$$P(A) = \sum_{i \text{ der } E_i \in A} P(E_i)$$

Uniform sannsynlighet

Anta at utfallsrommet er endelig og består av N utfall som alle er like sannsynlige.

Da har vi at $P(E_i) = \frac{1}{N}$ for hvert utfall.

Hvis begivenheten A består av $N(A)$ utfall, er

$$P(A) = \sum_{i \text{ der } E_i \in A} P(E_i) = \sum_{i \text{ der } E_i \in A} \frac{1}{N} = \frac{N(A)}{N}.$$

Vi får altså regelen om «gunstige delt på mulige» som en konsekvens av aksiomene.

I Lotto er det over 5 millioner mulige vinnerrekker.

Vi må være veldig tålmodige for å skrive opp alle disse!

Vi må derfor kunne beregne antall mulige vinnerrekker uten å skrive dem opp.

Kombinatorikk er navnet på den delen av matematikken som gir oss løsningen på dette og liknende problemer.



Multiplikasjonssetningen for ordnede par

En generell regel for antall ordnede par [dvs. (a, b) er forskjellig fra (b, a)].

Anta at:

- det første elementet i et ordnet par kan velges på n_1 måter
- for hvert mulig valg av det første elementet, kan det andre elementet velges på n_2 måter

Da er det til sammen $n_1 \times n_2$ mulige ordnede par.

Eksempel: Når vi kaster to terninger er det $6 \times 6 = 36$ mulige utfall.

Den generelle multiplikasjonssetningen

Multiplikasjonssetningen

Anta generelt at:

- det første elementet i et k-tuppel kan velges på n_1 måter
- for hvert mulig valg av det første elementet, kan det andre elementet velges på n_2 måter
- $\cdots$
- for hvert mulig valg av de $k-1$ første elementene, kan det k-te elementet velges på n_k måter.

Da er det til sammen $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$ mulige k-tupler.

Eksempel 1: Bilnummer

Et bilnummer består av to bokstaver og 5 siffer, for eksempel DN41710.

Hvor mange forskjellige bilnummer kan vi lage?

(Husk at første siffer kan ikke være 0)

Ulike typer utvalg

Vi skriver bokstavene i alfabetet på hver sin lapp og legger de 29 lappene i en eske.

Vi trekker så fire lapper, én etter én. Vi sier at vi trekker et **utvalg** på fire bokstaver.

Hvis vi legger en lapp tilbake før vi trekker den neste, trekker vi **med tilbakelegging**.

Hvis vi ikke legger lappen tilbake, trekker vi **uten tilbakelegging**.

Hvis rekkefølgen bokstavene trekkes i har betydning, trekker vi et **ordnet utvalg**.

Hvis rekkefølgen ikke har betydning, trekker vi et **uordnet utvalg**.

Trekking uten tilbakelegging

Table 1: Sannsynlighet for hver siffer når vi trekker uten tilbakelegging

Runde	Trekk	Antall mulige	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	9	10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10
2	4	9	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.00
3	2	8	0.12	0.12	0.12	0.12	0.00	0.12	0.12	0.12	0.12	0.00
4	0	7	0.14	0.14	0.00	0.14	0.00	0.14	0.14	0.14	0.14	0.00
5	6	6	0.00	0.17	0.00	0.17	0.00	0.17	0.17	0.17	0.17	0.00
6	8	5	0.00	0.20	0.00	0.20	0.00	0.20	0.00	0.20	0.20	0.00
7	5	4	0.00	0.25	0.00	0.25	0.00	0.25	0.00	0.25	0.00	0.00
8	3	3	0.00	0.33	0.00	0.33	0.00	0.00	0.00	0.33	0.00	0.00
9	7	2	0.00	0.50	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.50	0.00	0.00
10	1	1	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Ordnet vs. uordent utvalg

Anta at vi skal velge 2 av 5 personer A, B, C, D og E, en til å lede gruppen og en nestleder.

```
AB AC AD AE
BA BC BD BE
CA CB CD CE
DA DB DC DE
EA EB EC ED
```

Da har vi $5 \times 4 = 20$ mulige sammensetninger av ledelsen.

Generelt, så har vi

$$n(n-1)(n-2)\cdots(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

måter å velge et ordnet utvalg av k av n objekter.

Et ordnet utvalg av k elementer fra en mengde av n elementer kalles en **permutasjon** av størrelse k.

Ordnet vs. uordent utvalg

Anta nå at vi skal velge 2 av de 5 personene til å lede gruppen. Da har vi halv så mange, eller 10 mulige ledelser.

```
AB AC AD AE
BC BD BE
CD CE
DE
```

Generelt, så har vi $n!/(n-k)!$ permutasjoner av størrelse k fra en mengde av n elementer. For hver gruppe av k elementer, så har vi $k!$ permutasjoner som inneholder akkurat disse elementene.

Antall uordnede utvalg vi kan lage er:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$\binom{n}{k}$ kalles **binomialkoeffisient**.

Eksempel 2: Permutasjonsmønstre

Anta at tallene $1, 2, \ldots, n$ er sortert i en tilfeldig rekkefølge på en av de $n!$ like sannsynlige måtene vi kan gjøre det. Hva er sannsynligheten for at tallet 2 kommer etter tallet 1 i denne rekkefølgen?

```python
import random

random.seed(123)
n_sim = 1000
n = 10
count_ordered = 0

for _ in range(n_sim):
    perm = list(range(1, n + 1))
    random.shuffle(perm)
    i1 = perm.index(1)
    if i1 + 1 < n and perm[i1 + 1] == 2:
        count_ordered += 1

relative_frequency = count_ordered / n_sim
```

```
Simuleringer: 1000
Observert antall av '1 så 2': 101
Observert relativ frekvens: 0.1010
```

Eksempel 2: Permutasjonsmønstre

Anta at tallene $1, 2, \ldots, n$ er sortert i en tilfeldig rekkefølge på en av de $n!$ like sannsynlige måtene vi kan gjøre det. Hva er den teoretiske sannsynligheten for at tallet 2 kommer etter tallet 1 i denne rekkefølgen?

Betinget sannsynlighet

Skal vi endre vurderingen av sannsynligheten for begivenheten *A* hvis vi vet at en annen begivenhet *B* har inntruffet?

Eksempel: Intuisjon (kort)

Vi legger 4 røde og 2 svarte kort i en bunke. Trekk ett kort, så ett til.



Se på begivenhetene:

- A = «første kort er rødt»
- B = «andre kort er svart»

Vi har at $P(A) = 4/6 = 2/3$. Hvis A har inntruffet, er sannsynligheten for B lik 2/5.

Dette er den **betingede sannsynligheten** for B gitt A. Vi skriver $P(B \mid A) = 2/5$.

I eksemplet er det intuitivt klart hva betinget sannsynlighet er.

Det er ikke alltid like enkelt:

- Hva er den betingede sannsynligheten for at begge kortene er røde gitt at minst ett av dem er rødt?
- Hva er den betingede sannsynligheten for at det første kortet er rødt gitt at det andre er svart?

Vi trenger en definisjon av betinget sannsynlighet.

Eksempel: Fargeblindhet

Norske barn delt inn etter kjønn og fargeblindhet:

	Normal	Fargeblind	Totalt
Gutt	47.3%	4.1%	51.5%
Jente	48.3%	0.3%	48.6%
Totalt	95.6%	4.4%	100.0%

Vi velger tilfeldig ett barn og ser på begivenhetene:

- F = «barnet er fargeblindt»
- G = «barnet er en gutt»

Vi har $P(G) = 0.514$ og $P(F \cap G) = 0.041$. Det er «opplagt» at

$$P(F \mid G) = \frac{0.041}{0.514} = \frac{P(F \cap G)}{P(G)}.$$

Definisjon av betinget sannsynlighet

Dette er også definisjon av **betinget sannsynlighet**:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Ved å bytte om «rollene» til A og B har vi tilsvarende

$$P(B \mid A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}.$$

Eksempel: To terningskast

Vi kaster en vanlig terning to ganger og ser på begivenhetene:

- A = «første kast er 4»
- B = «summen er 7»

Vi ønsker å finne $P(A \mid B)$.

(i) Summen blir 7 hvis vi kaster (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2) eller (6,1). Det er 6 like sannsynlige ordnete par. Kun (4,3) gir begivenheten «første kast er 4». Dermed er $P(A \mid B) = 1/6$.

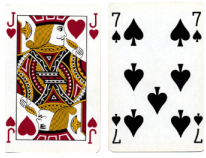
(ii) $P(A \cap B) = P(\{(4,3)\}) = 1/36$ og $P(B) = 6/36 = 1/6$. Dermed er

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/36}{1/6} = \frac{1}{6}.$$

Eksempel: Kort

Vi ser igjen på korteksemplet Trekker ett kort, så ett til.





Se på begivenhetene:

- A = «første kort er rødt»
- B = «andre kort er svart»

Vi vil bestemme $P(B \mid A)$ ut fra definisjonen.

Det gir en sjekk på at definisjonen er rimelig.



Vi kan trekke to kort på $6 \times 5 = 30$ måter.

Vi kan trekke først et rødt og så et svart kort på $4 \times 2 = 8$ måter.

Vi kan trekke «første kort er rødt» på $4 \times 5 = 20$ måter.

Det gir

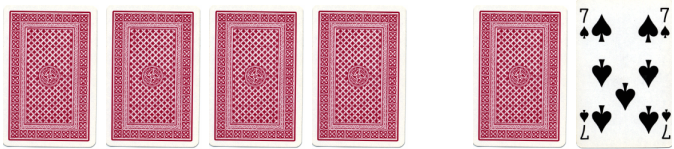
$$P(A \cap B) = \frac{8}{30} \text{ og } P(A) = \frac{20}{30}.$$

Dermed er

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{8/30}{20/30} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$$

Eksempel: Kort (nytt spørsmål)

Hva er den betingede sannsynligheten for at det første kortet er rødt, gitt at det andre er svart?



Se på begivenhetene:

- A = «første kort er rødt»
- B = «andre kort er svart»

Vi vil bestemme $P(A \mid B)$.



Vi har funnet $P(B \cap A) = 8/30$. Vi kan få et svart kort andre gang på to måter:

- først rødt, så svart kort, dvs. $A \cap B$
- to svarte kort, dvs. $A^C \cap B$

Derfor kan vi skrive B som en disjunkt union: $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$.

Det gir

$$P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = \frac{4 \times 2}{6 \times 5} + \frac{2 \times 1}{6 \times 5} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

Dermed er

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{8/30}{10/30} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

Tolkning av betinget sannsynlighet

Hva betyr det egentlig at den betingede sannsynligheten er $4/5 = 80\%$ for at det første kortet er rødt gitt at det andre er svart?

Husk at sannsynlighet er relativ frekvens «i det lange løp».

Vi tenker oss at vi trekker to kort mange ganger.

- At $P(A) = 2/3$ betyr at det første kortet vil være rødt ca $2/3$ av gangene.
- At $P(A \mid B) = 4/5$ betyr at hvis vi bare teller med de gangene der det andre kortet er svart så vil det første kortet være rødt ca $4/5$ av disse gangene.

Produktsetningen

Av definisjonen av betinget sannsynlighet

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ og } P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

følger **produktsetningen**:

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)\, P(B) = P(B \mid A)\, P(A).$$

Eksempel: Kort



A = «første kort er rødt»
B = «andre kort er svart»

Ovenfor fant vi $P(A \cap B)$ som antall gunstige utfall delt på antall mulige utfall.

Vi kan også finne denne sannsynligheten ved produktsetningen.

Vi har $P(A) = 4/6$ og $P(B \mid A) = 2/5$.

Dermed gir produktsetningen:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B \mid A) = \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{30}.$$

Produktsetningen for flere begivenheter

For tre begivenheter blir produktsetningen:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) &= P(A_1 \cap A_2)\, P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \\ &= P(A_1)\, P(A_2 \mid A_1)\, P(A_3 \mid A_1 \cap A_2). \end{aligned}$$

Produktsetningen gjelder på tilsvarende måte for fire og flere begivenheter.

Eksempel: Levetid

Etter offentlig statistikk er sannsynligheten

- 96% for at 65 år gammel kvinne skal bli minst 70 år
- 93% for at 70 år gammel kvinne skal bli minst 75 år
- 88% for at 75 år gammel kvinne skal bli minst 80 år

Hva er sannsynligheten for at 65 år gammel kvinne skal bli minst 80 år?

Vi tar for oss 65 år gammel kvinne og ser på begivenhetene

- A_1 = «kvinnen blir minst 70 år» $P(A_1) = 0.96$
- A_2 = «kvinnen blir minst 75 år» $P(A_2 \mid A_1) = 0.93$
- A_3 = «kvinnen blir minst 80 år» $P(A_3 \mid A_2 \cap A_1) = 0.88$

- A_1 = «kvinnen blir minst 70 år» $P(A_1) = 0.96$
- A_2 = «kvinnen blir minst 75 år» $P(A_2 \mid A_1) = 0.93$
- A_3 = «kvinnen blir minst 80 år» $P(A_3 \mid A_2 \cap A_1) = 0.88$

Hvis kvinnen blir minst 80 år, blir hun også minst 70 år og minst 75 år.

Derfor er $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = A_3$ og

$$\begin{aligned} P(\text{minst 80 år}) &= P(A_3) \\ &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= P(A_1) \times P(A_2 \mid A_1) \times P(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \\ &= 0.96 \times 0.93 \times 0.88 \\ &= 0.79. \end{aligned}$$

Total sannsynlighet

Anta $A_1, A_2, \ldots, A_k$ er disjunkte og samlet dekker utfallsrommet, dvs. $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k = \Omega$.

Vi kan da skrive en begivenhet B som en union av disjunkte begivenheter:

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \cdots \cup (A_k \cap B).$$

Dette og produktsetningen gir:

Setningen om total sannsynlighet

$$P(B) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{k} P(B \mid A_i)\, P(A_i).$$

Eksempel: Kort i to bunker

Vi har to bunker med kort:

- Bunke I: 4 røde, 2 svarte.
- Bunke II: 2 røde, 4 svarte.

Vi velger tilfeldig en bunke og trekker to kort fra denne.

Hva er sannsynligheten for at vi får to røde kort?

La

- A_1 = “vi trekker fra bunke I”
- A_2 = “vi trekker fra bunke II”
- B = “to røde”

Vi beregner $P(B)$ med total sannsynlighet og betingede sannsynligheter.

- Bunke I: 4 røde, 2 svarte.
- Bunke II: 2 røde, 4 svarte.

- A_1 = "vi trekker fra bunke I"
- A_2 = "vi trekker fra bunke II"
- B = "to røde"

Opplysningene gir $P(A_1) = P(A_2) = 1/2$ og

$$P(B \mid A_1) = \frac{4 \times 3}{6 \times 5} = \frac{6}{15}$$
$$P(B \mid A_2) = \frac{2 \times 1}{6 \times 5} = \frac{1}{15}$$

Setningen om total sannsynlighet gir

$$P(B) = P(B \mid A_1)P(A_1) + P(B \mid A_2)P(A_2) = \frac{6}{15} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{15} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{30} = 0.233.$$

Bayes' setning

Anta $A_1, A_2, \ldots, A_k$ er disjunkte og samlet dekker utfallsrommet, dvs. $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k = \Omega$.

Definisjonen av betinget sannsynlighet gir at

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)}.$$

Vi bruker produktsetningen for telleren og total sannsynlighet for nevneren:

Bayes' setning

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(B \mid A_j)\, P(A_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(B \mid A_i)\, P(A_i)}.$$

Eksempel 3: Kort i to bunker (nytt spørsmål)

- Bunke I: 4 røde, 2 svarte.
- Bunke II: 2 røde, 4 svarte.

- A_1 = “vi trekker fra bunke I”
- A_2 = “vi trekker fra bunke II”
- B = “to røde”

Hvis begge kortene er røde, hva er sannsynligheten for at vi trakk fra bunke I ?

Avhengige og uavhengige begivenheter

Husk definisjonen av betinget sannsynlighet

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Hvis $P(A \mid B) = P(A)$ er A og B er **uavhengige** begivenheter.

Hvis $P(A \mid B) \neq P(A)$ er A og B er **avhengige** begivenheter.

Hvis $P(A \mid B) = P(A)$, så er $P(B \mid A) = P(B)$.

Avhengige og uavhengige begivenheter

Hvis $P(A \mid B) = P(A)$, dvs. A og B er uavhengige begivenheter, så er

- $P(A^C \mid B) = P(A^C)$, dvs. A^C og B er uavhengige
- $P(A \mid B^C) = P(A)$, dvs. A og B^C er uavhengige
- $P(A^C \mid B^C) = P(A^C)$, dvs. A^C og B^C er uavhengige

Viktig resultat:

Uavhengighet

A og B er uavhengig hvis og bare hvis

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Resultatet gjelder også når A og/eller B har sannsynlighet 0.

Eksempel: Mynt og femkrone

Kast kronestykke og femkrone. La for eksempel *KM* bety krone på kronstykket og mynt på femkronen.

Utfallsrom $\Omega = \{MM, MK, KM, KK\}$ med lik sannsynlighet 1/4.

Vi ser på begivenheter

- $A = \{MM, MK\}$
- $B = \{MM, KM\}$
- $C = \{MK, KM\}$

Begivenhetene er **parvis uavhengige**: $P(A)P(B) = P(A \cap B) = 1/4$, osv.

Men de er ikke **kollektiv uavhengig**: $P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A)P(B)P(C)$.

Uavhengighet for flere begivenheter

Begivenhetene $A_1, \ldots, A_n$ er uavhengige hvis vi for enhver k og enhver delmengde av indekser $\{i_1, \ldots, i_k\}$ har at

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j}).$$

Ovenfor har vi sett på situasjoner der vi kan vise at begivenheter er uavhengige.

Vanligvis er uavhengighet en forutsetning for sannsynlighetsmodellen vår.

Oppsummering

- Ordnet og uordnet utvalg, trukket med og uten tilbakelegging.
- Binomialkoeffisient.
- Betinget sannsynlighet: basisdefinisjon og produktsetningen.
- Total sannlighet og Bayes: nøkkelverktøy for oppdatert sannsynlighet.
- Uavhengighet: parvis og kollektiv uavhengighet; vær oppmerksom på forskjeller.