6.2 Signifikanstester

- Konfidensintervaller er nyttige når vi ønsker å estimere en populasjonsparameter
- Signifikanstester er nyttige dersom vi ønsker å teste en hypotese om en parameter i en populasjon
- Bruker observerte data til å teste hypotesen om populasjonen
- Typisk prosedyre
  - Beregn sannsynlighet for observert utfall av en statistikk (eller noe mer ekstremt) gitt antatt hypotese
  - Hvis sannsynlighet liten, forkast hypotese

Eksempel studielån

- Gjennomsnittlig studielån:

  $\bar{x}_1$=$21200 ved private college

  $\bar{x}_2$=$17100 ved offentlige college

  - Forskjell $4100 mellom private og offentlige college, reell eller tilfeldig?
  - P(Forskjell mellom $\bar{x}_1$ og $\bar{x}_2$ ≥ 4100, gitt at det ikke er noen forskjell mellom forventningene i populasjonen) =0.17
  - Ganske høy sannsynlighet, altså ikke så veldig overraskende resultat, data gir ikke grunnlag for å påstå at det er forskjeller i lånenivå mellom private og offentlige college

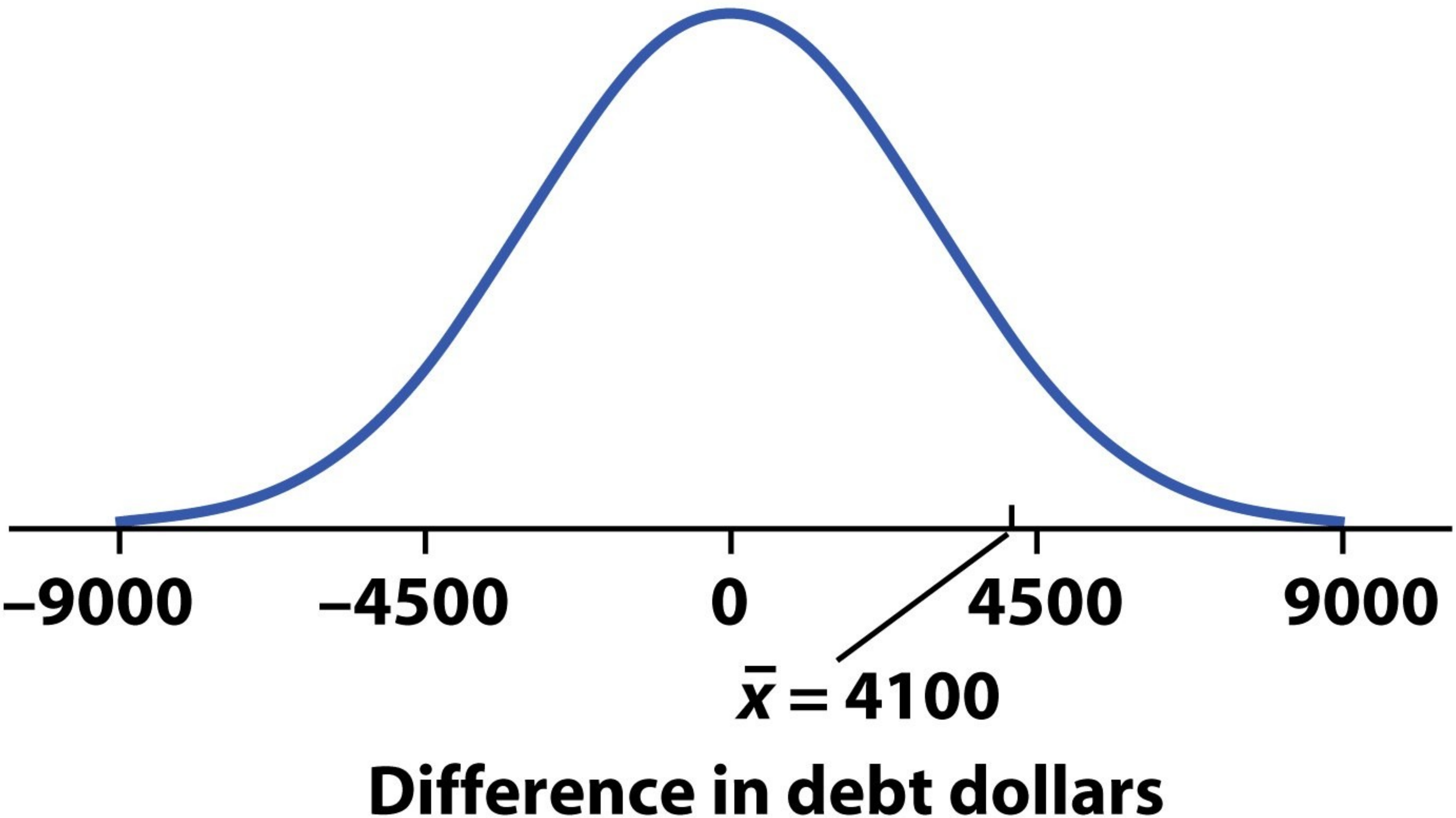


Figure 6-7
Introduction to the Practice of Statistics, Fifth Edition

Eksempel studielån

- Gjennomsnittlig studielån

  i 1997 er $\bar{x}_1$ =\$11400

  i 2002 er $\bar{x}_2$ =\$18900

  - Forskjell \$7500 mellom 2002 og 1997
  - P(Forskjell mellom $\bar{x}_1$ og $\bar{x}_2 \geq 7500$, gitt at det ikke er noen forskjell mellom forventningene i populasjonen) =0.00004
  - Data gir grunnlag for å forkaste hypotese om at det ikke er forskjeller i lånenivå mellom 2002 og 1997

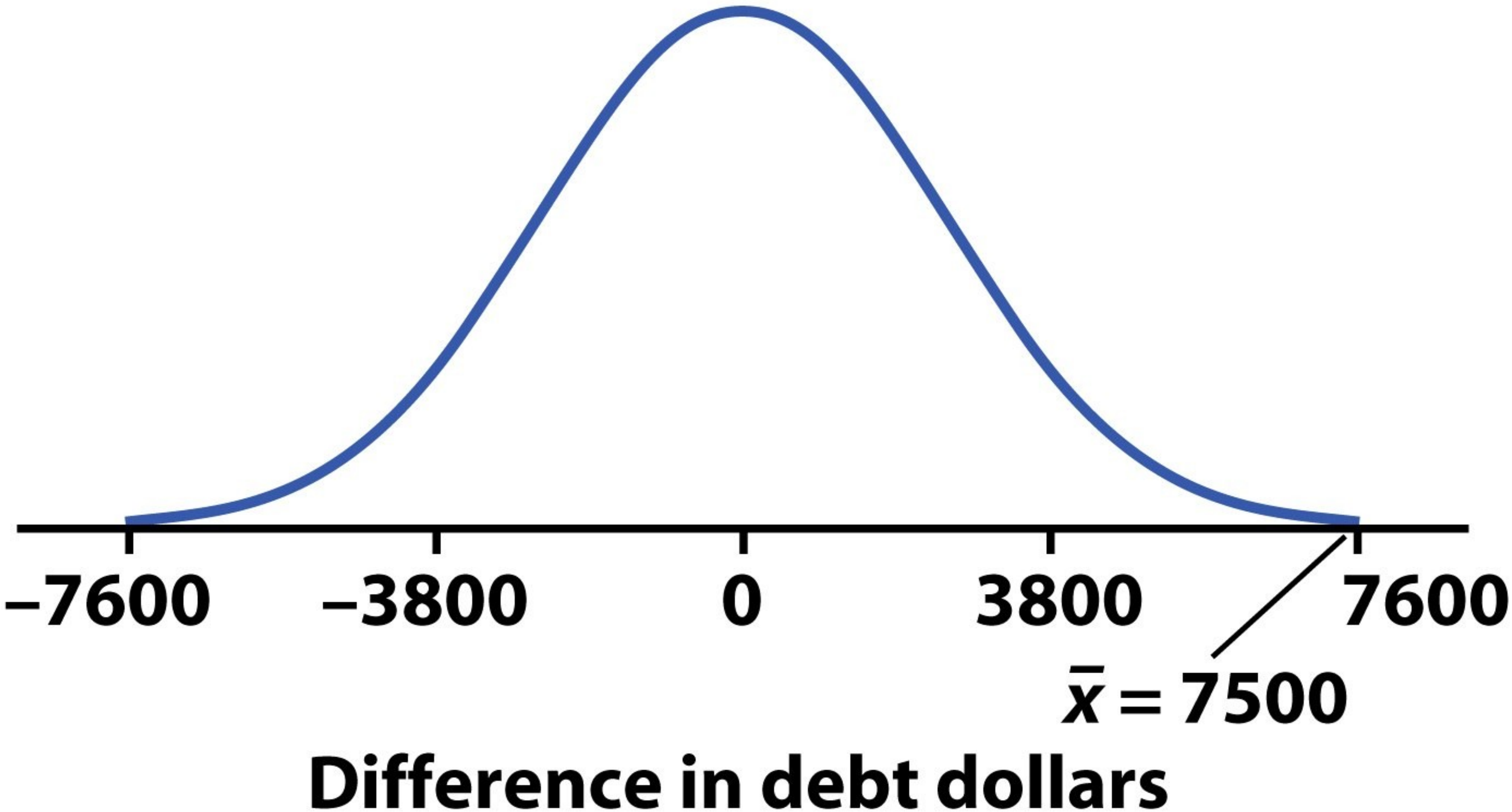


Figure 6-8
Introduction to the Practice of Statistics, Fifth Edition

Hovedtrinn

Spørsmål: Forskjell mellom nivåer (forventninger)
Ser om data er *kompatibel med hypotesen om at det ikke er noen forskjell*

Hvis ikke overraskende forskjell (eks. sanns. 0.17)

- Ikke grunnlag i data for å påstå at det er en forskjell

Hvis overraskende stor forskjell (eks. sanns. 0.00004)

- Forkast antagelse om ingen forskjell

Hypoteser

Null-hypotese H_0

– Påstand som ønskes testet

– Typisk: Ingen effekt, Ingen forskjell mellom de ukjente forventningene

– Eks. H_0: $\mu = \mu_1 - \mu_2 = 0$, eventuelt $\mu_1 = \mu_2$

Signifikanstest: Designet for å angi bevisstyrke *mot* H_0

Alternativ hypotese H_a

– Det er en effekt / forskjell

– Eks. H_a: $\mu \neq 0$ eventuelt $\mu_1 \neq \mu_2$

NB: Hypoteser er alltid utsagn/antagelser om populasjoner (eller modeller), ikke et spesielt utfall. Derfor må H_0 og H_a alltid formuleres utifra de ukjente populasjonsparametrene, aldri statistikk(er)!!!

Hypoteser

- Fordi H_a utrykker effekten vi ønsker å finne ut om er tilstede, er det lurt å *starte med å formulere* H_a og deretter sette opp H_0 som utsagnet om at den ønskede effekten ikke er tilstede
- Å formulere H_a er ofte den vanskeligste oppgaven. Spesielt er det ofte ikke opplagt om denne skal være

  ensidig (f.eks. H_a: $\mu>0$) eller *tosidig* (f.eks. H_a: $\mu\neq0$)
  - uttrykker om parameteren er forskjellig fra nullhypotese-verdien i en bestemt retning eller ikke
  - Man får ikke lov til å se på data for å formulere H_a (juks!)
  - Dersom man ikke har god begrunnelse på forhånd om retning på effekten, skal man velge tosidig H_a

Teststatistikk

Baserer test på en statistikk som estimerer parameteren vi er interessert i (ofte den samme som vi ville brukt til et konfidensintervall for parameteren)

– Eks.: $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ estimerer $\mu = \mu_1 - \mu_2$

- Verdier langt fra parameterverdi spesifisert av H_0 gir bevis mot H_0
- H_a angir hvilken retning som teller:

– Ensidig H_a: $\mu_1 > \mu_2$ angir at vi må ha stor $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ som bevis mot H_0

– Ensidig H_a: $\mu_1 < \mu_2$ angir at vi må ha liten $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ som bevis mot H_0

– Tosidig H_a: $\mu_1 \neq \mu_2$ angir at vi må ha stor $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$ som bevis mot H_0

Standardisert test-statistikk

For å undersøke hvor langt estimatet er fra parameterverdien spesifisert av H_0, standardiserer vi estimatet

$$z = \frac{estimat - parameterverdi\ under\ H_0}{standard\ avvik\ for\ estimat}$$

Eksempel studielån

Forskjell på de ukjente, sanne forventningene til størrelse på lån ved private og offentlige college?

H_0 : Det er ingen forskjell i de sanne forventningene
H_a: Det er en forskjell i de sanne forventningene

Dvs: $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ mot $H_a : \mu_1 \neq \mu_2$ (tosidig alternativ)

Vi får oppgitt: $\sigma_{\bar{x}1-\bar{x}2} = 3000$

Signifikanstest: P-verdi

- *P-verdi*: Sannsynligheten for at et utfall er like ekstremt eller mer ekstremt enn faktisk utfall (beregnet ved å anta at parameterverdien gitt av H_0 er sann)
  - Ekstremt: Lang fra hva vi ville forvente hvis H_0 var sann. Retning på hva som regnes som ekstremt: Bestemmes av H_a og H_0
  - *Jo mindre P-verdien er, jo sterkere bevis har vi mot* H_0

Eksempel studielån

Forskjell mellom private og offentlige college?
H0: $\mu 1 - \mu 2 = 0$ mot Ha: $\mu 1 - \mu 2 \neq 0$
Estimat for $\mu 1 - \mu 2$: $\bar{x}1 - \bar{x}2$ (= 4100)

Ekstremt: Langt fra hva vi ville forvente hvis H_0 var sann, dvs store verdier av både positive og negative forskjeller, dvs store verdier av absoluttverdien $|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|$ teller som bevis mot H_0

Utfall er like ekstremt eller mer ekstremt enn faktisk utfall: Like store eller større enn observert verdi av absoluttverdien $|\bar{x}1 - \bar{x}2|$, som betyr like store eller større enn observert verdi av $|z|$, der z er standardiserert test-statistikk (gitt $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$): $z = (4100-0)/3000 = 1.37$

Eksempel studielån

P-verdi: Sannsynligheten for at et utfall er like ekstremt eller mer ekstremt enn faktisk utfall (beregnet ved å anta at parameterverdien gitt av H_0 er sann)

Standardiserert,observert test-statistikk (gitt $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$):

z=(4100-0)/3000 = 1.37

Utfall er like ekstremt eller mer ekstremt enn faktisk utfall: Like store eller større enn observert verdi av absoluttverdien $|\bar{x}1-\bar{x}2|$, som betyr like store eller større enn observert verdi av $|z|$

Z tilnærmet N(0,1): *P-verdi =*

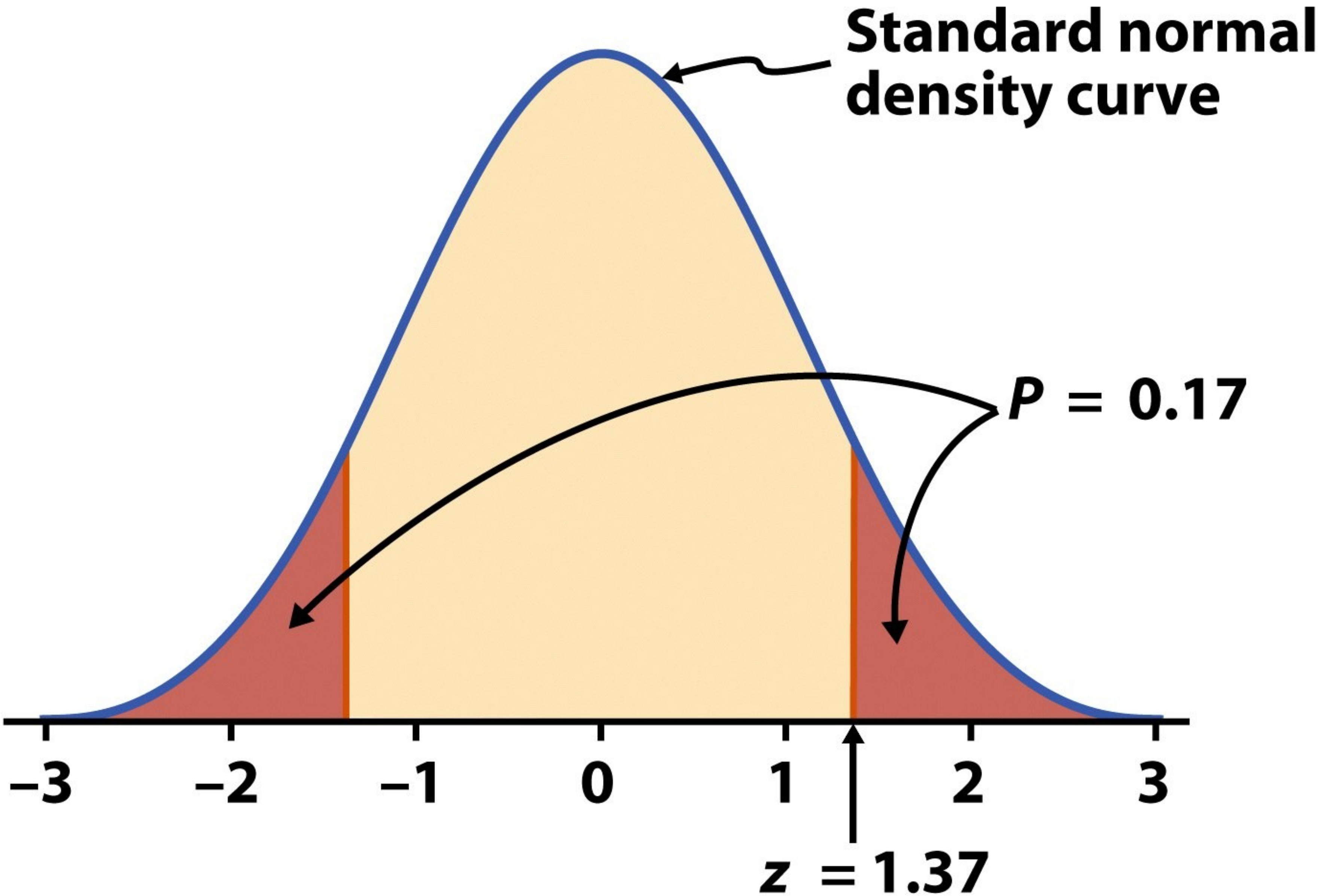


Figure 6-9
Introduction to the Practice of Statistics, Fifth Edition

Statistisk signifikans

Hvordan konkludere?

- Forkaster H_0 når *P-verdi* er liten nok

Signifikansnivå α: Grenseverdi for når vi forkaster

–Forkaster H_0 når *P-verdi* $\leq \alpha$

–Ikke grunnlag for å forkaste H_0 når P-verdi>α

–Typisk: α=0.05 (eller 0.01)

Signifikant betyr at bevisene mot nullhypotesen oppfyller standarden satt av α. Typisk utsagn er «Resultatene er signifikante ($P < 0.05$)»

- Hvis vi velger signifikansnivå α=0.05 krever vi at dataene gir bevis mot H_0 som bare vil skje i 5% av tilfellene hvis H_0 er sann
- Hvis vi velger signifikansnivå α=0.01 krever vi at dataene gir bevis mot H_0 som bare vil skje i 1% av tilfellene hvis H_0 er sann
    - *Vi krever altså sterkere bevis mot H_0 hvis vi velger α=0.01 enn hvis vi velger α=0.05*

Signifikanstest

1. Formuler H_0 og H_a
2. Beregn test-statistikk
3. Finn P-verdi
4. Formuler en konklusjon

NB: Bruker ofte datamaskin til å finne P-verdi, men en datamaskin

- Kan ikke formulere H_0 og H_a
- Kan ikke tolke P-verdien for deg
- Kan ikke bedømme om forutsetningene for å bruke testen er oppfylt

Eksempel studielån

Forskjell mellom private og offentlige college?

$H0: \mu 1 - \mu 2 = 0$ mot $Ha: \mu 1 - \mu 2 \neq 0$

Estimat for $\mu 1 - \mu 2$: $\bar{x}1 - \bar{x}2$ (= 4100)

Standardiserer: $z = (4100-0)/3000 = 1.37$

Z tilnærmet N(0,1):

– *P-verdi* = $P(|Z|>1.37) = P(Z<-1.37) + P(Z>1.37)$

$= 2 * P(Z<-1.37) = 2*0.0853 = 0.1706$

Eksempel på tolkning og konklusjon:

Det er 17% sjanse for å observere en forskjell like ekstrem eller mer ekstrem som den observerte forskjellen på $4100 hvis den sanne populasjons-forskjellen mellom forventningene er 0. P-verdien sier oss altså at det observerte utfallet ikke er spesielt ekstremt. Vi kan si at de observerte dataene ikke gir grunnlag for å konkludere at det er en signifkant forskjell i forventet studielån mellom private og offentlige skoler

Eksempel studielån

Økning i størrelsen på studielån fra 1997 til 2002?
H_0: $\mu_2 - \mu_1 = 0$ mot ensidig H_a: $\mu_2 - \mu_1 > 0$,

Estimat for $\mu_2 - \mu_1$: $\bar{x}_2 - \bar{x}_1$ (= 7500)

Vi får oppgitt: $\sigma_{\bar{x}1-\bar{x}2} = 1900$

Standardiserer (parameterverdi under H0 er $\mu_2 - \mu_1 = 0$):

$z = (7500-0)/3000 = 3.95$

Z tilnærmet N(0,1):

– *P-verdi* = P(Z> 3.95) = 0.00004

Eksempel på tolkning og konklusjon: Det er en 4 til 100.000 sjanse for å observere en forskjell like stor eller større som den observerte forskjellen på $7500 hvis den sanne populasjons-forskjellen mellom forventningene er 0. *P-verdien sier oss altså at det observerte utfallet er ekstremt sjeldent*. *Vi konkluderer at de observerte dataene gir grunnlag for å konkludere at nullhypotesen er feil*. Dataene viser tydelig at forventet studielån har økt mellom 1997 og 2002 (P<0.001)

Tester for populasjonsforventning

$H_0 : \mu = \mu_0$

Data: $x_1, \ldots, x_n$

Estimator for μ: $\bar{x}$

Teststatistikk: $z = (\bar{x} - \mu_0)/\sigma_{\bar{x}} = (\bar{x} - \mu_0)/(\sigma\sqrt{n})$

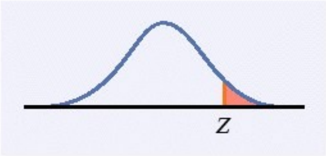
z TEST FOR A POPULATION MEAN

To test the hypothesis H_0: $\mu = \mu_0$ based on an SRS of size n from a population with unknown mean μ and known standard deviation σ, compute the test statistic

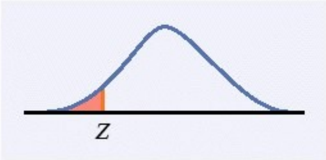
$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

In terms of a standard normal random variable Z, the P-value for a test of H_0 against

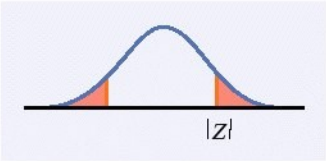
H_a: $\mu > \mu_0$ is $P(Z \geq z)$



H_a: $\mu < \mu_0$ is $P(Z \leq z)$



H_a: $\mu \neq \mu_0$ is $2P(Z \geq |z|)$



These P-values are exact if the population distribution is normal and are approximately correct for large n in other cases.

Definition, pg 410
Introduction to the Practice of Statistics, Fifth Edition

Eksempel: Blodtrykk

Blodtrykk menn alder 35-44 har forventning 128 og standardavvik σ=15

En bedriftslege ønsker å undersøke: Har mannlige toppledere (alder 35-44) i bedriften annerledes forventet blodtrykk enn den generelle populasjonen av menn på samme alder (som er 128)?

Målinger av blodtrykket til 72 toppledere: $\bar{x}$ =126.07
Bedriftslegen har ingen grunn til å anta noen retning på forskjellen. Vi kan anta at standardavviket for mannlige toppledere også er σ=15.

– $H_0: \mu=\mu_0=128$, $H_a: \mu \neq \mu_0$ der $\mu_0 = 128$

– $z=(126.07-128)/(15/\sqrt{72})=-1.09$

– P-verdi =

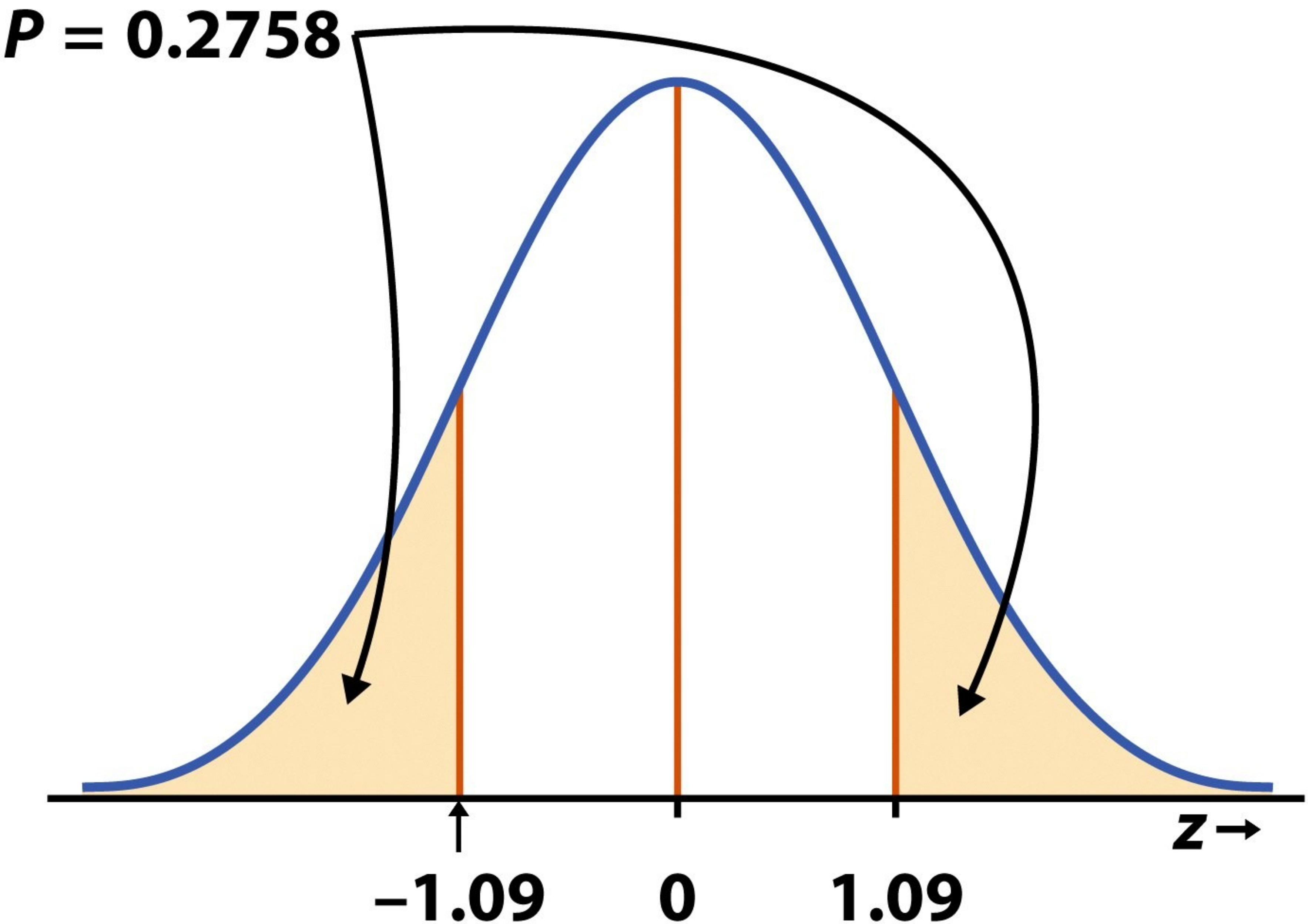


Figure 6-11
Introduction to the Practice of Statistics, Fifth Edition

Eksempel: Blodtrykk

- P-verdi = 0.2758
- Tolkning og konklusjon: Et SRS med n=27 fra den den generelle populasjonen av menn på samme alder vil 27% av gangene gi et gjennomsnittlig blodtrykk like langt eller lenger fra 128 som det observerte $\bar{x}$=126.07. Den observerte $\bar{x}$ gir altså ikke bevis for at topplederene er annerledes enn andre menn på samme alder. Ingen grunn til å forkaste H_0

To-sidige tester og konfidensintervall

Konfidensintervall med konfidens C:

$[\bar{x}-z^*\sigma/\sqrt{n}, \bar{x}+z^*\sigma/\sqrt{n}]$

Dette er laget fra de observerte dataene for ett utvalg. Verdier av μ utenfor intervall er ikke kompatible med de observerte data.

Mulig test-prosedyre:

– Forkaste H_0: $\mu=\mu_0$ hvis μ_0 ikke er i konfidensintervallet

Kan vises: Ekvivalent med signifikanstest

En tosidig signifikanstest med nivå α som forkaster $H0{:}\mu = \mu_0$ er ekvivalent med at μ_0 faller utenfor konfidensintervallet for μ med nivå $C=1-\alpha$

Noen ganger enklere å konstruere konfidensintervaller

Eksempel: To-sidige tester og konfidensintervall

- Analyse av konsentrasjonen av farmasøytisk produkt. Ikke presis målemetode, repeterte analyser av samme prøve vil gi litt forskjellig svar. Vi vet at konsentrasjon N(μ,σ=0.0068)-fordelt
- Laboratoriet har blitt spurt om å evaluere en påstand om at konsentrasjonen i en prøve er 0.86%
  - H_0:μ=0.86 H_a: $\mu \neq$0.86
  - Tre målinger av prøven ga resultatene 0.8403, 0.8363 og 0.8447
  - $\bar{x}$=0.8404, , σ=0.0068, n=3

Eksempel: To-sidige tester og konfidensintervall

- I stedet for å gjøre signifikanstesten, kan vi alternativt lage et konfidensintervall og se om μ_0=0.86 er innenfor eller utenfor dette intervallet. For signifkansnivå 0.01 må vi lage et 99% konfidensintervall (fordi 1-0.01=0.99)
- $\bar{x}$ =0.8404, σ=0.0068, n=3

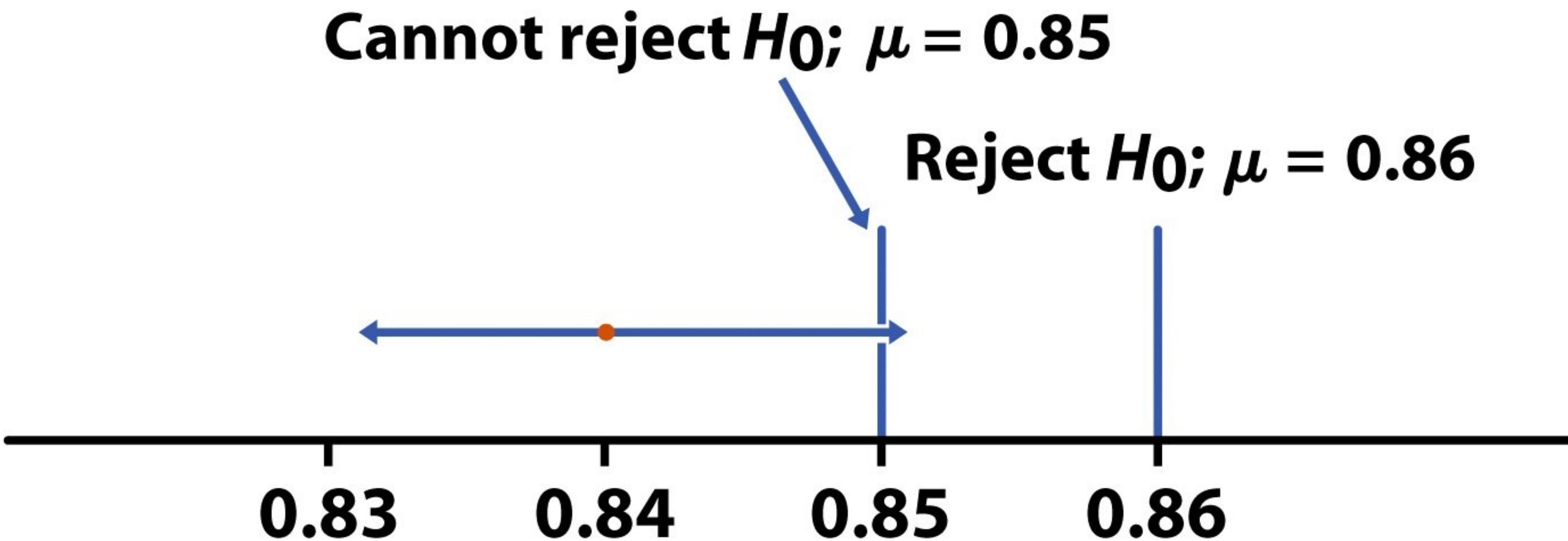


Figure 6-13
Introduction to the Practice of Statistics, Fifth Edition

P-verdier mot fast nivå α

To mulige måter å rapportere:

– Hvis P-verdi < α, si at H_0 er forkastet på nivå α

– Angi P-verdi direkte

Testing farmasøytisk produkt: Konsentrasjon $N(\mu,\sigma=0.0068)$

- $H0: \mu=0.86$ Ha: $\mu \neq 0.86$
  - Observasjoner 0.8403, 0.8363, 0.8447
  - $\bar{x}=0.8404$
  - $z=(0.8404-0.86)/(0.0068/\sqrt{3})=-4.99$
  - $P=2P(Z>|-4.99|)<0.0004$

–Signifikant på 0.05 nivå, 0.01 nivå, og 0.001 nivå. Faktisk signifikant helt ned til 0.0004-nivå

Generelt: P-verdi er det laveste signifikansnivå som gir forkastning.

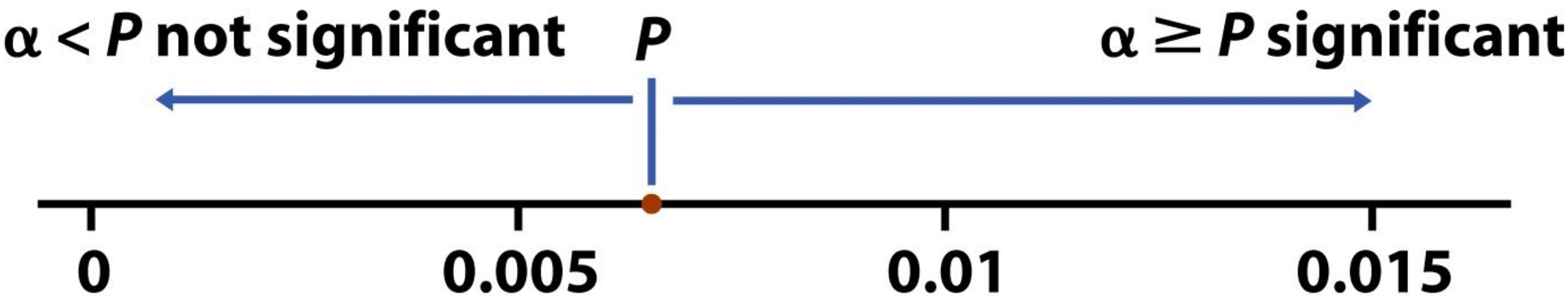


Figure 6-14
Introduction to the Practice of Statistics, Fifth Edition

6.3 Bruk og misbruk av tester

Utføre test er enkelt (software), å bruke test vanskeligere

- Kun gyldig under visse forutsetninger
- Konfidensnivå: Ingen klar grense, vanlig å rapportere P-verdi
- Forkastning H_0: Effekt statistisk signifikant
- Men effekten kan være liten! (hvis *n* er stor)
- Ingen forkastning behøver ikke bety H_0 er sann
- Ofte mulig å gjøre mange mulige tester
    - P-verdi relatert til å gjøre *en* test
    - Hvis man gjør mange tester må justeringer gjøres

Eksempel liten effekt som er signifikant: Testing av en korrelasjon

- To variable
  - H_0: Ingen korrelasjon mellom de to variablene ($\rho = 0$)
  - H_a: Det er korrelasjon mellom de to variablene ($\rho \neq 0$)
- 400 observasjoner, observerer $r=0.1$
- Signifikanstest viser at det er en statistisk signifikant korrelasjon mellom de to variablene på signifikansnivå $\alpha=0.05$
- Observert variasjon i den ene variabelen forklart av den andre variabelen: $r^2=0.1^2=0.01$
- At testen viser at det er en statistisk signifikant korrelasjon betyr altså ikke at det er en sterk sammenheng mellom variablene, bare at det er sterke bevis for at det er noe sammenheng

Hiv-behandling

- Behandlingsgruppe og kontrollgruppe
- Insidensrateforhold I:
  - Forhold mellom smitterate i behandlingsgruppe i forhold til kontrollgruppe
- H0: I=1 (lik smitterate smitterate i behandlingsgruppe og kontrollgruppe)
- 95% konfidensintervall: [0.63,1.58]
- Kan ikke forkaste nullhypotesen om at smitterate er lik i behandlingsgruppe og kontrollgruppe, men det betyr ikke at nullhypotesen er sann!
  - Konfidensintervallet indikerer at behandling både kan gi forbedringer og forverringer!
  - Mer data er nødvendig for å finne ut hva som er riktig

Genomiske eksperimenter

- Ønsker å finne gen som forklarer sykdom
- Mange titusener mulige gener
- Kan utføre en test på hvert gen
  - 10 000 tester, α=0.05, dvs ca 5% av 10 000 tester vil være signifikante bare pga tilfeldigheter
  - Dvs forventer at 500 tester vil være signifikante kun pga. tilfeldigheter!

- Forskning:
  - Hvordan behandle mange tester simultant