FORELESNINGSNOTATER OG OPPGAVER STK1100 – SANNSYNLIGHETSREGNING OG STATISTISK MODELLERING, VÅREN 2026

28. januar 2026

EMIL A. STOLTENBERG

Sammendrag. Dette er forelesningsnotater og oppgaver til emnet STK1100 gitt ved Matematisk institutt, Universitetet i Oslo. Notatene følger boken Devore et al. (2021) ganske tett, og vil bli oppdatert etterhvert som vi skrider fremover. Send meg gjerne en epost når du oppdager feil eller mangler!

Innhold

1. Eksperimenter, utfallsrom og hendelser 2
1.1. Eksperimenter 2
1.2. Utfallsrom 2
1.3. Hendelser 2
1.4. Oppgaver 4
2. Sannsynlighetsmål 5
2.1. Kolmogorovs aksiomer 6
2.2. Oppgaver 7
3. Betinget sannsynlighet 7
3.1. Definisjonen 7
3.2. Oppgaver 8
4. Uavhengige hendelser 9
4.1. Definisjon av uavhengighet 9
4.2. Betinget uavhengighet 10
4.3. Oppgaver 10
Referanser 12

1. Eksperimenter, utfallsrom og hendelser

Dette er notater delvis basert på Kapittel. 2.1 i Devore et al. (2021). Du bør lese dette kapittelet før du leser videre. I det minste, gjør deg kjent med definisjonene av union, snitt, og komplement.

1.1. **Eksperimenter.** Vi kan være usikre på hva som skal skje, på hva som er tilfellet akkurat nå, og på hva som har skjedd. Tenk på et *eksperiment* om enhver situasjon der vi er usikre på noe. Spinner vi et kronestykke opp i lufta er vi usikre på om det vil vise kron eller mynt. En lege gir en pasient en ny type medisin og er usikker på om den vil være lindrende, ikke ha noen effekt, eller gjøre ting værre. Teller vi antall kast med en terning til vi får vår første sekser er vi usikre på hvor mange ganger vi må kaste terningen. En meteorolog er usikker på hvor mye regn det vil falle i morgen. Meterologen er også usikker på differansen mellom regnfallet i morgen og dagen etter i morgen. En kvinner lurer på om hun er gravid. En historiker lurer på hvor mange av de som levde i Norge i 1348 fortsatt var i live i 1351. En dommer er usikker på om den tiltalte er skyldig eller ikke.

1.2. **Utfallsrom.** Et utfallsrom er en mengde som inneholder alle mulige utfall av et eksperiment. Vi bruker typisk symbolet Ω ('store omega') for utfallsrommet. For myntkastingen er utfallene kron eller mynt, så utfallsrommet er

$$\Omega = \{\text{kron}, \text{mynt}\}.$$

For testingen av den nye medisinen er utfallsrommet

$$\Omega = \{\text{lindrende}, \text{ingen effekt}, \text{værre}\}.$$

Utfallsrommet for antallet ganger vi må kaste en terning til vi får vår første sekser er

$$\Omega = \{1, 2, \ldots\}.$$

For mengden regn i morgen, (gitt av vi kan måle det helt presist), kan et naturlig utfallsrom være

$$\Omega = [0, \infty) = \{\omega \in \mathbb{R} \colon \omega \geq 0\},$$

og for differansen mellom regnet i morgen og i overimorgen er et naturlig utfallsrom

$$\Omega = \mathbb{R}$$

Et mulig utfall er et element i utfallsrommet. Dersom vi kaster en terning gjennomfører vi et eksperiment med seks mulige utfall, utfallsrommet er $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, og $1, 2, 3, 4, 5, 6$ er utfall. Dersom vi kaster to terninger, en blå og en rød, har utfallsrommet $6 \times 6 = 36$ mulige utfall på formen $\omega = (\text{blå terning}, \text{rød terning})$. Utfallsrommet er

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (6, 5), (6, 6)\}.$$

og $(6, 6)$ er et mulig utfall.

1.3. **Hendelser.** La Ω være et utfallsrom. En *hendelse* er en delmengde $A \subset \Omega$, slik at vi under betingelsene til eksperimentet, kan avgjøre om A intraff eller ikke. At en delmengde A inntreffer betyr at utfallet $\omega \in A$. Tenk på eksperimentet der vennen din kaster to kronerstykker, et farget blått og et farget rødt, slik at utfallsrommet er

$$\Omega = \{(\text{kron}, \text{kron}), (\text{kron}, \text{mynt}), (\text{mynt}, \text{kron}), (\text{mynt}, \text{mynt})\},$$

men der vennen din kun forteller deg utfallet til det blå kronestykket. Dersom $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ er et utfall betyr dette at vennen din kun forteller deg ω_1, og holder ω_2 skjult. På bakgrunn av et slikt eksperiment vil vi kunne vite om

$$A = \{\text{blå kron}\} = \{(\text{kron}, \text{kron}), (\text{kron}, \text{mynt})\}$$

intraff, og om

$$A^c = \{\text{blå mynt}\} = \{(\text{mynt}, \text{kron}), (\text{mynt}, \text{mynt})\},$$

intraff, og her er dette all interessant informasjon eksperimentet gir. Altså er delmengden A en hendelse, og A^c også en hendelse. Den ikke så interessante informasjon eksperimentet gir, er at Ω intraff (det gjør det alltid) og at $\emptyset$ ikke intraff (det gjør det aldri). Så Ω og $\emptyset$ er også hendelser. Samler vi sammen alle hendelsene i eksperimentet der vennen din kaster to kronestykker men skjuler utfallet til det rød kronestykket, får vi familien av hendelser gitt ved

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}.$$

Nå, se på delmengden

$$B = \{\text{blå og rød kron}\} = \{(\text{kron}, \text{kron})\}$$

Siden vi kun har informasjon om det blå kronestykket, kan vi ikke vite om B intraff, uansett utfall. Dette betyr at i eksperimentet der vi kun har informasjon om det blå kronestykket er ikke B en hendelse. At B ikke er en hendelse ser vi også fra at B ikke er i $\mathcal{A}$, som jo er familien av hendelser.

La nå A og B være to delmengder av et eller annet utfallsrom Ω. Hvis vi kan avgjøre om A intreffer, og vi kan avgjøre om B intreffer, så kan vi avgjøre om A *eller* B intreffer, altså om $A \cup B$ intreffer. Sagt på en annen måte, dersom A og B er hendelser, så er $A \cup B$ en hendelse. Og slik kan vi fortsette.

σ-algebra

Motivert av dette skal vi samle alle delmengdene av Ω som vi kaller hendelser i en familie $\mathcal{A}$, og kreve at denne familien av delmengder er slik at

(i) hvis $A \in \mathcal{A}$, så er $A^c \in \mathcal{A}$; og
(ii) hvis $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$, så er $\cup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}$.

Her er $\cup_{n\geq 1} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$. Vi sier at $\mathcal{A}$ er lukket under komplementer og tellbare unioner. En slik familie av delmengder kalles en σ-algebra. Merk at fra (i) og (ii) følger det at $\Omega \in \mathcal{A}$ og at den tomme mengden $\emptyset = \Omega^c \in \mathcal{A}$ (vis det). For et gitt utfallsrom Ω utstyrt med en σ-algebra $\mathcal{A}$, definerer vi delmengdene inneholdt i $\mathcal{A}$ som *hendelser*: En delmengde $A \in \mathcal{A}$ er en hendelse.

Def. hendelse

For myntkastet har vi et utfallsrom $\Omega = \{\text{kron}, \text{mynt}\}$. Da kan vi sjekke at familien av hendelser

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \{\text{kron}\}, \{\text{mynt}\}\},$$

er en σ-algebra. For en fotballkamp er utfallsrommet $\Omega = \{h, u, b\}$, og en σ-algebra på Ω er

$$\mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega, \{h\}, \{u\}, \{b\}, \{h, u\}, \{h, b\}, \{u, b\}\}.$$

Familien $\mathcal{F}$ av delmengder av $\Omega = \{h, u, b\}$ gitt ved

$$\mathcal{C} = \{\emptyset, \Omega, \{h\}, \{u, b\}\},$$

er også en σ-algebra på Ω, men det er σ-algebra som kun gir oss informasjon om hjemmelaget vant eller ikke (ikke om det ble uavgjort, f.eks.). Dette betyr at $\{b\}$ er en hendelse når vi arbeider med $\mathcal{B}$, men ikke dersom vi arbeider med $\mathcal{C}$.

Fra de tre σ-algebraene $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ ser vi at kravet om at de er lukket under uendelig tellbare unioner er å ta litt hardt i, fordi $\mathcal{A}$ bare har fire medlemmer, $\mathcal{B}$ har åtte, og $\mathcal{C}$ har fire. Generelt, for et endelig utfallsrom Ω med k elementer, kan ingen σ-algebra på Ω inneholde mer enn 2^k delmengder av Ω. Potensmengden

$$2^\Omega = \{\text{alle mulige delmengder av } \Omega\},$$

inneholder $2^{|\Omega|}$ elementer, der $|\Omega|$ = antall elementer i Ω. På et endelig utfallsrom holder det derfor å kreve at $\mathcal{A}$ er en *algebra* av hendelser. Familien $\mathcal{A}$ av delmengder av Ω er en algebra på Ω dersom den er slik at

algebra av hendelser

(i)′ hvis $A \in \mathcal{A}$, så er $A^c \in \mathcal{A}$; og
(ii)′ hvis $A, B \in \mathcal{A}$, så er $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Igjen, fra (i)′ og (ii)′ følger det at Ω og $\emptyset$ er i $\mathcal{A}$. Du kan sjekke at en σ-algebra alltid er en algebra, og at på endelige utfallsrom er en algebra en σ-algebra, så derfor holder det å snakke om σ-algebraer.

1.4. **Oppgaver.**

(a) Overbevis deg selv om at for alle mengder A, B, C, har vi

(i) $A \cup B = B \cup A$, og $A \cap B = B \cap A$;
(ii) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, og $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
(iii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, og $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Dette er henholdvis den kommutative, den assosiative, og den distributive egenskapen til union og snitt.

Oppgave 1.1 La Ω være en mengde, og la A og B være delmengder av Ω.

(a) Tegn Venn-diagrammer eller finn andre argumenter som overbeviser deg om det følgende

(i) $\Omega^c = \emptyset$;
(ii) $\Omega \cap A = A$;
(iii) $A \cup \emptyset = A$;
(iv) $A \cap \emptyset = \emptyset$;
(v) $A \cap A^c = \emptyset$;
(vi) $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$;
(vii) $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$;
(viii) $A \subset (A \cup B)$, og $B \subset (A \cup B)$;
(ix) $(A \cap B) \subset A$, og $(A \cap B) \subset B$;
(x) Hvis $A \subset B$ så er $B^c \subset A^c$;
(xi) $\emptyset \subset A$.

(b) De Morgans lover sier at

De Morgans

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c;$$
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

Bevis dem. Gjerne ved hjelp av Venn-diagrammer.

Oppgave 1.2 La $B, A_1, A_2, \ldots$ være delmengder av en mengde Ω. Husk definisjonene

$$\cup_{n\geq 1} A_n = \cup_{n=1}^\infty A_n = A_1 \cup A_2 \cup \cdots = \{\omega \in \Omega \colon \omega \in A_n \text{ for minst en } n \geq 1\},$$
$$\cap_{n\geq 1} A_n = \cap_{n=1}^\infty A_n = A_1 \cap A_2 \cap \cdots = \{\omega \in \Omega \colon \omega \in A_n \text{ for alle } n \geq 1\},$$

med den endelige unionen $\cup_{n=1}^{m} A_n = A_1 \cup \cdots \cup A_m$ og det endelige snittet $\cap_{n=1}^{m} A_n = A_1 \cap \cdots \cap A_m$ definert tilsvarende.

(a) Vis at

$$\cup_{i\geq 1} A_i = A_1 \cup (\cup_{i\geq 2} A_i), \quad \text{og} \quad \cap_{i\geq 1} A_i = A_1 \cap (\cap_{i\geq 2} A_i),$$

og at det her ikke er noe spesielt med A_1.

(b) Vis at

$$B \cap (\cup_{n\geq 1} A_n) = \cup_{n\geq 1}(B \cap A_n), \quad \text{og} \quad B \cup (\cap_{n\geq 1} A_n) = \cap_{n\geq 1}(B \cup A_n).$$

(c) Anta at $\cup_{n\geq 1} A_n = \Omega$, la $B \subset \Omega$, og vis at

$$B = \cup_{n\geq 1}(B \cap A_n).$$

Anta nå at $A_1, \ldots, A_n$ er disjunkte, det vil si $A_i \cap A_j = \emptyset$ for alle $i \neq j$. Vis at da er $(B \cap A_i)$ og $(B \cap A_j)$ også disjunkte for alle $i \neq j$. En disjunkt samling mengder $A_1, A_2, \ldots$ hvis union utgjør Ω, kalles en partisjon av Ω.

(d) Utvid De Morgans lover fra to til uendelige mange mengder: Vis at

$$(\cup_{n\geq 1} A_n)^c = \cap_{n\geq 1} A_n^c, \quad \text{og} \quad (\cap_{n\geq 1} A_n)^c = \cup_{n\geq 1} A_n^c.$$

(e) Forklar at de egenskapene du nå har utledet for uendelige unioner og snitt, også holder for endelige unioner og snitt.

Oppgave 1.3 Vi slår kron-eller-mynt med tre kronestykker samtidig.

(a) Skriv ned utfallsrommet Ω.

(b) Hvor mange delmengder er det i potensmengden 2^Ω på Ω? Du skal slippe å skrive dem ned.

(c) Skriv ut delmengden $A = \{\text{tre like}\}$.

(d) Skriv ned den minste algebraen som inneholder A.

Oppgave 1.4 La $A_1, \ldots, A_n, B$ være mengder i en algebra $\mathcal{A}$ på Ω.

(a) Vis at $\cup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$.

(b) Vis også mengder som $\cap_{i=1}^{n} A_i^c$, og $B \setminus (\cup_{i=1}^{n} A_i)$, og så videre, er i $\mathcal{A}$.

Oppgave 1.5 La Ω være et utfallsrom.

(a) La $\mathcal{A}_0 = \{A_1, \ldots, A_n\}$ være en partisjon av Ω. Betrakt familien av mengder definert ved

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \text{alle unioner av mengder in } \mathcal{A}_0\}.$$

Vis at $\mathcal{A}$ er en algebra. Vi sier at $\mathcal{A}$ er algebraen generert av $\mathcal{A}_0$.

(b) La $\mathcal{B}$ være en algebra på Ω slik at $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{B}$. Vis at $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$, altså at algebraen generert av $\mathcal{A}_0$ den minste algebraen som inneholder $\mathcal{A}_0$.

2. Sannsynlighetsmål

Vi har et ufallsrom Ω og en σ-algebra av hendelser $\mathcal{F}$ på dette utfallsrommet. Sagt på en tørr(?) måte, så handler den matematiske teorien om sannsynlighet om å måle den relative størrelsen til hendelser.

2.1. **Kolmogorovs aksiomer.** Et sannsynlighetsmål er en funksjon $\Pr(\cdot)$ med domene $\mathcal{F}$ som antar reelle verdier,

$$\Pr\colon \mathcal{F} \to \mathbb{R},$$

Kolmogorovs aksiomer

og tilfredsstiller Kolmogorovs aksiomer, det vil si de tre følgende egenskapene

(i) $\Pr(A) \geq 0$ for alle hendelser A;
(ii) $\Pr(\Omega) = 1$;
(iii) $\Pr(\cup_{n\geq 1} A_n) = \sum_{n\geq 1} \Pr(A_n)$ for disjunkte hendelser $A_1, A_2, \ldots$, det vil si $A_i \cap A_j = \emptyset$ når $i \neq j$.

Den tredje egenskapen kalles tellbar additivitet. Setter vi samme utfallsrommet Ω, σ-algebraen $\mathcal{F}$ av hendelser, og et sannsynlighetsmål Pr definert på $\mathcal{F}$, får vi sannsynlighetsrommet $(\Omega, \mathcal{A}, \Pr)$. Et slikt sannsynlighetsrom er en matematisk modell for å si noe om tilfeldighet eller usikkerhet. Det er den eneste slike modellen vi forholder oss til i dette emnet (og for den saks skyld, i alle andre emner i sannsynlighet og statistikk jeg vet om på Blindern). Dersom utfallsrommet vårt er endelig, $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$, så σ-algebraen $\mathcal{F}$ kun innholder endelig mange delmengder, blir kravet i (iii) til et krav om endelig additivitet

sannsynlighetsrom

(iii)′ $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B)$ for alle disjunkte $A, B \in \mathcal{F}$.

Så dersom vi jobber på et endelig utfallsrom med en algebra $\mathcal{A}$ av hendelser, så er en funksjon $Q\colon \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ som tilfredsstiller (i), (ii), og (iii)′ et sannsynlighetsmål.

At sannsynlighetsmål er tellbart additive gir dem visse kontinuitetsegenskaper, kalt kontinuitet av sannsynlighetsmål: La $A_1, A_2, \ldots$ være en voksende følge av hendelser, det vil si $A_1 \subset A_2 \subset \cdots$. Da er

$$\Pr(\cup_{n\geq 1} A_n) = \lim_n \Pr(A_n),$$

Tilsvarende, dersom $B_1, B_2, \ldots$ er en avtagende følge av hendelser, $B_1 \supset B_2 \supset \cdots$, så er

$$\Pr(\cap_{n\geq 1} B_n) = \lim_n \Pr(B_n).$$

Vi beviser den første av disse for å se hvordan tellbar additivitet brukes. La $A_1, A_2, \ldots$ være en voksende følge mengder. Sett $A_0 = \emptyset$ og definer

$$D_n = A_n \setminus A_{n-1}, \quad \text{for } n \geq 1.$$

Som en oppgave, forklar hvorfor D_n er en hendelse; at D_n og D_m er disjunkte for alle $n \neq m$; og at $\cup_{n\geq 1} A_n = \cup_{n\geq 1} D_n$. Bruker vi disse tingene kombinert med tellbar additivitet finner vi at

$$\begin{aligned}\Pr(\cup_{n\geq} A_n) = \Pr(\cup_{n\geq} D_n) &= \sum_{n\geq 1} \Pr(D_n) \\ &= \lim_n \sum_{j=1}^{n} \Pr(D_j) = \lim_n \sum_{j=1}^{n} \{\Pr(A_j) - \Pr(A_{j-1})\} = \lim_n \Pr(A_n).\end{aligned}$$

Den andre likhetene bruker tellbar additivitet, den fjerde bruker en egenskap du skal bevise i Oppgave 2.1**(e)** (og at $A_{j-1} \subset A_j$), mens den siste likheten bruker at til venstre for denne har vi en teleskoperende sum.

2.2. **Oppgaver.**

Oppgave 2.1 La $A, A_1, A_2 \ldots$ og B være hendelser, og Pr et sannsynlighetsmål. Vis at

(a) $\Pr(\emptyset) = 0$;

(b) $\Pr(\cup_{i=1}^n A_i) = \sum_{i=1}^n \Pr(A_i)$;

(c) $\Pr(A) = 1 - \Pr(A^c)$;

(d) $\Pr(A) \leq 1$;

(e) $\Pr(B \setminus A) = \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$;

(f) $\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B)$, så $\Pr(A \cup B) \leq \Pr(A) + \Pr(B)$;

(g) Hvis $A \subset B$ så er $\Pr(A) \leq \Pr(B)$.

Oppgave 2.2 I denne oppgaven tar vi egenskapen fra Oppgave 2.1**(f)** litt videre.

(a) Vis at for alle hendelser $A_1, \ldots, A_m$ er $\Pr(\cup_{j=1}^m A_j) \leq \sum_{j=1}^m \Pr(A_j)$.

(b) Vis at dette også holder for uendelig mange hendelser $A_1, A_2, \ldots$, det vil si

$$\Pr(\cup_{n\geq 1} A_n) \leq \sum_{n\geq 1} \Pr(A_n),$$

som betyr at sannsynlighetsmål er tellbart subadditive.

Oppgave 2.3 La $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ være utfallsrommet forbundet med et terningkast.

(a) Definer funksjonen

$$Q_1(A) = \frac{|A|}{6}, \quad \text{for alle } A \in 2^\Omega,$$

der $|A|$ = antall elementer i A. Vis at Q_1 er et sannsynlighetsmål på 2^Ω. Sannsynlighetsrommet $(\Omega, 2^\Omega, Q_1)$ er det forbundet med å kaste en rettferdig terning.

(b) Definer funksjonen

$$Q_2(A) = \frac{1}{21} \sum_{\omega \in A} \omega, \quad \text{for alle } A \in 2^\Omega,$$

Vis at Q_2 er et sannsynlighetsmål.

(c) Forsøk å konstruer en funksjon W på 2^Ω slik at $W(A) \geq 0$ for alle $A \in 2^\Omega$ og $W(\Omega) = 1$, men som ikke er et sannsynlighetsmål.

(d) La $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_m\}$ være et utfallsrom, og $\mathcal{A}$ en algebra av hendelser på Ω. La $p_1, \ldots, p_m$ være tall in $[0, 1]$ slik at $\sum_{j=1}^m p_j = 1$. Vis at $Q_3(A) = \sum_{j:\omega_j \in A} p_j$ for $A \in \mathcal{A}$ er et sannsynlighhetsmål.

3. Betinget sannsynlighet

Dette er notater knyttet til Kap. 2.4 i Devore et al. (2021). Sannsynligheten vi gir en hendelse kan være avhengig av hva vi vet om andre hendelser.

3.1. **Definisjonen.** Vi har et sannsynlighetsrom $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$ (vi har alltid et sannsynlighetsrom, og som regel vil vi ikke nevne det i det hele tatt). La A og B være to hendelser, med $\Pr(B) > 0$. Da er den betingende sannsynligheten for A gitt B definert ved

$$\Pr(A \,|\, B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}. \tag{1}$$

I tilfeller der $\Pr(B) = 0$, er $\Pr(A \mid B)$ ikke definert. Hvis du tegner noen Venn-diagrammer er denne definisjonen ganske intuitiv: Sannsynligheten for A gitt B er størrelsen (målt ved Pr) til den delen av A som overlapper B, normalisert ved størrelsen til B.

Definisjonen i (1) fungerer for enhver hendelse A, så vi kan definere en funksjon

$$\Pr(\cdot \mid B) \colon \mathcal{F} \to \mathbb{R}.$$

Det er en fin oppgave å sjekke at $\Pr(A \mid B)$ definert ved (1) for alle $A \in \mathcal{F}$, er et sannsynlighetsmål. Notasjonen '$A \mid B$' leses som 'A gitt B', og det er viktig å forstå at $A \mid B$ *ikke* er en hendelse, '$\mid$' er *ikke* en mengdeoperasjon. Kanskje notasjon som $Q_B(A) = \Pr(A \cap B)/\Pr(B)$, eller lignende, for den betingede sannsynligheten til A gitt B er tydeligere, men $\Pr(A \mid B)$ er så vanlig at vi vil stort sett bruke den.

3.2. **Oppgaver.**

Oppgave 3.1 La B være en hendelse med $\Pr(B) > 0$. Definer $A \mapsto \Pr(A \mid B)$ for alle hendelser A, ved (1).

(a) Vis at $\Pr(\cdot \mid B)$ er et sannsynlighetsmål.

(b) Hold hendelsen A konstant, og sjekk at $B \mapsto \Pr(A \mid B)$ *ikke* er et sannsynlighetsmål.

(c) Vis *multiplikasjonsregelen* multiplikasjonsregelen

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A \mid B)\Pr(B) = \Pr(B \mid A)\Pr(A),$$

såfremt de betingede sannsynlighetene er definert.

(d) La A og B være hendelser, med $\Pr(B) > 0$. Utled Bayes' formel Bayes' formel

$$\Pr(A \mid B) = \frac{\Pr(B \mid A)\Pr(A)}{\Pr(B)}.$$

Det er vanlig å kalle $\Pr(A)$ *a priori* sannsynligheten for A, og $\Pr(A \mid B)$ *a posteriori* sannsynligheten for A, eller kort bare prior og posterior. prior og posterior

Oppgave 3.2 La $A_1, \ldots, A_n$ være en partisjon av utfallsrommet, det vil si at disse er disjunkte hendelser hvis union utgjør hele utfallsrommet.

(a) La B være en hendelse. Vis *Loven om total sannsynlighet* Loven om total sannsynlighet

$$\Pr(B) = \Pr(B \mid A_1)\Pr(A_1) + \cdots + \Pr(B \mid A_n)\Pr(A_n).$$

Forklar hvorfor vi kan bruke denne formelen uten å først sjekke at $\Pr(A_j)$ er positiv for hver bidige j.

(b) Anta at $\Pr(B) > 0$. Utled fra det over at for enhver hendelse A_j tilhørende partisjonen $\{A_1, \ldots, A_n\}$ kan Bayes' formel skrives

$$\Pr(A_j \mid B) = \frac{\Pr(B \mid A_j)\Pr(A_j)}{\Pr(B \mid A_1)\Pr(A_1) + \cdots + \Pr(B \mid A_n)\Pr(A_n)}.$$

Utled også formelen for spesialtilfellet der partisjonen av utfallsrommet som vi er interessert i simpelthen er $\{A, A^c\}$.

Oppgave 3.3 En sykdom rammer 1 prosent av befolkningen. Det finnes en test for denne sykdommen som har en *sensitivitet* $= \Pr(\text{test sier syk} \mid \text{faktisk syk})$ på 95 prosent, og en *spesifisitet* $= \Pr(\text{test sier frisk} \mid \text{faktisk frisk})$ på 90 prosent. Et tilfeldig individ tar denne testen, og testen sier 'syk' (som noe kontraintuitivt i sensitivitet og spesifisitet

denne settingen kalles et 'positivt' testresultat). Hva er sannsynligheten for at denne personen faktisk er syk?

– Bruken av 'tilfeldig' i denne oppgaven er litt slepphendt, men vanlig. Det vi mener her, og som ofte menes med 'tilfeldig', er at alle individider/enheter i en populasjon har samme sannsynlighet for å bli trukket. Som regel vil det være tydelig fra konteksten om 'tilfeldig' brukes på denne måten.

Oppgave 3.4 Tenk på alle familier i verden med to og bare to barn.

(a) Fra denne populasjonen trekker du tilfeldig en familie, men alt du får vite om denne familien er at minst ett av barna er en jente. Hva er sannsynligheten for at familien du trakk har to jentebarn?

(b) Igjen, fra populasjonen beskrevet over trekker du tilfeldig en familie, og denne gangen er alt du får vite at minst ett av barna er en jente født på en tirsdag. Hva er sannsynligheten for at familien du trakk har to jentebarn?

(c) Skriv Python-kode der du ved hjelp av simuleringer 'sjekker' det du kom frem til i **(b)**. I Python, for å tilfeldig trekke ti tifeldige tall fra $\{1, \ldots, 7\}$ med tilbakelegg kan du skrive

```
import numpy as np
pr = np.zeros(7) + 1/7.
np.random.choice([1,2,3,4,5,6,7],size=10,p = pr,replace=True)
```

4. Uavhengige hendelser

Dette er notater knytte til Kap. 2.5 i Devore et al. (2021). Noen ganger vil det være slik at informasjon om én hendelse, ikke påvirker sannsynligheten vi gir en annen.

4.1. **Definisjon av uavhengighet.** Hendelsene A og B er uavhengige dersom

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B). \tag{2}$$

To hendelser som *ikke* er uavhengighe, er avhengige. For å slippe å skrive at A og B er uavhengige, skriver vi $A \perp\!\!\!\perp B$. Så $A \perp\!\!\!\perp B$ betyr at A og B tilfredsstiller (2). Merk at $A \perp\!\!\!\perp B$ betyr det samme som $B \perp\!\!\!\perp A$.

Def. uavhengige hendelser

Nå definerer vi uavhengighet for flere enn to hendelser. Hendelsene $A_1, \ldots, A_m$ er uavhengige dersom

$$\Pr(\cap_{j\in J} A_j) = \prod_{j\in J} \Pr(A_j), \quad \text{for alle } J \subset \{1, \ldots, m\}. \tag{3}$$

Dette beskriver 2^m likheter, men det er ikke alle disse vi trenger å sjekke (som en liten telleoppgave: hvor mange likheter må vi sjekke?). Et eksempel: hendelsene A_1, A_2, A_3 er uavhengige dersom $\Pr(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \Pr(A_1)\Pr(A_2)\Pr(A_3)$, og $\Pr(A_1 \cap A_2) = \Pr(A_1)\Pr(A_2)$, og $\Pr(A_1 \cap A_3) = \Pr(A_1)\Pr(A_3)$ og $\Pr(A_2 \cap A_3) = \Pr(A_2)\Pr(A_3)$. Dette er 4 likheter, ikke $2^3 = 8$.

Enda mer generelt: Hendelsene $A_1, A_2, \ldots$ er uavhengige dersom $A_{n_1}, \ldots A_{n_m}$ uavhengige for enhver endelig delmengde $\{n_1, \ldots, n_m\} \subset \{1, 2, \ldots\}$.

En ting definisjonene i (2) og (3) skjuler litt, er at uavhengighet mellom to eller flere hendelser ikke kun er en egenskap ved hendelsene, men en egenskap ved kombinasjonen av hendelser *og* sannsynlighetsmål (se for eksempel Oppgave 4.1**(g)**). Dette innebærer blant annet at vi *ikke* kan 'tegne uavhengigehet' i et Venn-diagram.

Dersom $A_1, \ldots, A_m$ er uavhengige, ser vi fra definisjonen at de er *parvis uavhengige*, det vil si at $A_i \perp\!\!\!\perp A_j$ for alle $i \neq j$, som vi definerte det over. Den motsatte implikasjonen er *ikke* sann: Parvis uavhengige hendelser er ikke nødvendigvis uavhengige, som vi skal se i Oppgave 4.2.

parvis uavhengige

4.2. **Betinget uavhengighet.** Fra Oppgave 3.1 vet vi at $\Pr(\cdot \mid B)$ er et sannsynlighetsmål. Definisjonen av betinget uavhengighet er derfor strengt tatt overflødig, men vi tar den med. La B være en hendelse med $\Pr(B) > 0$. Hendelsene $A_1, \ldots, A_m$ er betinget uavhengige gitt B dersom (3) holder for $\Pr(\cdot \mid B)$, det vil si at $\Pr(\cap_{j\in J} A_j \mid B) = \prod_{j\in J} \Pr(A_j \mid B)$ for alle $J \subset \{1, \ldots, m\}$. For hendelsene A_1, A_2, og B med $\Pr(B) > 0$, betyr dette at A_1 er uavhengige av A_2 gitt B, dersom

$$\Pr(A_1 \cap A_2 \mid B) = \Pr(A_1 \mid B) \Pr(A_2 \mid B),$$

som jo er den samme definisjonen som i (2), bare under et annet sannsynlighetsmål.

4.3. **Oppgaver.**

Oppgave 4.1 La A og B være to hendelser.

(a) Vis at $A \perp\!\!\!\perp B$, $A \perp\!\!\!\perp B^c$, $A^c \perp\!\!\!\perp B$, og $A^c \perp\!\!\!\perp B^c$ sier det samme (er ekvivalente).

(b) La B være en hendelse med $\Pr(B) = 0$. Vis at $A \perp\!\!\!\perp B$ for alle hendelser A.

(c) La B være en hendelse med $\Pr(B) = 1$. Vis at $A \perp\!\!\!\perp B$ for alle hendelser A.

(d) Dersom $A \perp\!\!\!\perp A$, hva kan vi si om hendelsen A?

(e) Vis at dersom $\Pr(A) > 0$ og $\Pr(B) > 0$ og $A \cap B = \emptyset$, så er A og B avhengige.

(f) Vis at er det følgende ekvivalent

(i) $\Pr(A \cap B) = \Pr(A) \Pr(B)$;
(ii) $\Pr(A \mid B) = \Pr(A)$;
(iii) $\Pr(B \mid A) = \Pr(B)$,

såfremt de betingede sannsynlighetene er definert.

(g) To hendelser som er uavhengige under et sannsynlighetsmål, kan være avhengige under et annet. Se på delmengdene $A = \{1, 3, 5\}$ og $B = \{5, 6\}$ av utfallsrommet $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. La Q_1 og Q_2 være sannsynlighetsmålene definert i Oppgave 2.3**(a)**&**(b)**. Vis at $A \perp\!\!\!\perp B$ under Q_1, men at A og B er avhengige under Q_2.

(h) Kan du konstruere et tredje sannsynlighetsmål som er slik at A og B er uavhengige hendelser?

Oppgave 4.2 Vi kaster to kronestykker, et blått og et rødt, som begge er slik at sannsynligheten for kron er $1/2$.

(a) La $B = \{\text{blå kron}\}$, $R = \{\text{rød kron}\}$ og $L = \{\text{to like utfall}\}$. Det er naturlig å anta at B og R er uavhengige, og vi antar det. Vis at hendelsene B, R, L er parvis uavhengige, men ikke uavhengige.

(b) Du har to rettferdige terninger, og kaster begge. Lag et eksempel på tre hendelser som er parvis uavhengige, men ikke uavhengige.

(c) I **(a)** og **(b)** brydde vi oss ikke med å presist beskrive sannsynlighetsrommene som vi implisitt jobber med. Forsøk å gi en presis beskrivelse av dem.

Oppgave 4.3 La A_1, A_2, og B være tre hendelser, med $\Pr(B) > 0$.

(a) Vis at multiplikasjonsregelen for betinget sannsynlighet tar følgende form

$$\Pr(A_1 \cap A_2 \mid B) = \Pr(A_1 \mid A_2 \cap B) \Pr(A_2 \mid B) = \Pr(A_2 \mid A_1 \cap B) \Pr(A_1 \mid B).$$

(b) Vis at dersom A_1 og A_2 er uavhengige gitt B, så er

$$\Pr(A_2 \mid A_1 \cap B) = \Pr(A_2 \mid B),$$

såfremt begge sider er definert.

(c) La A_1, A_2 og B være hendelser med sannsynligheter som verken er lik 0 eller 1. Vi tenker oss at A_1 skjer først, deretter A_2, og at vi oppdaterer sannsynligheten til B ettersom hendelsene inntreffer. Definer $Q(\cdot) = \Pr(\cdot \mid A_1)$. Dersom A_1 inntreffer er $Q(B) = \Pr(B \mid A_1)$ vår oppdaterte sannsynlighet for B. Hvis så A_2 intreffer, oppdaterer vi på nytt, og vår oppdaterte sannsynlighet for B er (vis dette)

$$Q(B \mid A_2) = \Pr(B \mid A_1 \cap A_2).$$

Anta nå at A_1 og A_2 er uavhengige gitt B, og gitt B^c. Vis at

$$Q(B \mid A_2) = \frac{\Pr(A_2 \mid B)Q(B)}{\Pr(A_2 \mid B)Q(B) + \Pr(A_2 \mid B^c)Q(B^c)}.$$

Her ser vi at vår posterior etter A_1 er blitt vår prior når A_2 skjer.

(d) Se tilbake på Oppgave 3.3. Personen som fikk positivt testresultat bestemmer seg for å ta testen en gang til. Nok en gang gir testen positivt resultat. Hva er nå sannsynligheten for at personen faktisk er syk? Hvilken svært rimelige antagelse gjør du her?

(e) Konstruer et enkelt eksempel der to hendelser A og B er uavhengige gitt C, men ikke uavhengige (altså avhengige) gitt C^c.

Oppgave 4.4 Vi har en hatt med to kronestykker som ser identiske ut, men ikke er det. Det ene kronestykket er rettferdig: sannynligheten for kron er den samme som sannynligheten for mynt, altså 1/2; det andre kronetsykket er ikke rettferdig, det har sannsynlighet 3/4 for kron.

(a) Du trekker et tilfeldig kronestykke fra hatten (som igjen betyr at begge kronestykkene har samme sannsynlighet for å bli trukket), og slår kron-eller-mynt. Hva er sannsynlighetene for kron?

(b) Det ble kron. Hva er sannsynligheten for at du trakk det rettferdige kronestykket?

(c) Du bestemmer deg for å slå kron-eller-mynt med det samme kronestykket en gang til. Hva er nå sannsynligheten for kron? Husk at du fikk kron på første kast. Hvilken (helt rimelige!) antagelse gjør du her?

(d) Det ble kron igjen. Hva er nå sannsynligheten for at du trakk det rettferdige kronestykket?

Oppgave 4.5 La A_1, A_2, A_3 være uavhengige hendelser.

(a) Vis at A_1, A_2, A_3^c er uavhengige; og at A_1, A_2^c, A_3^c er uavhengige; og så videre.

(b) Vis at $A_1 \cap A_2$ og A_3 er uavhengige.

(c) Vis at $A_1 \cup A_2$ og A_3 er uavhengige.

(d) Generaliser.

Oppgave 4.6 Med samme sannsynlighet trekker jeg tallet 4 eller 5, og kaster mitt rettferdige kronestykke så mange ganger som tallet jeg trakk. Du får vite at jeg fikk to kron, ikke flere. Hvor mange ganger tror du jeg kastet kronestykket mitt?

Referanser

Devore, J. L., Berk, K. N., and Carlton, M. A. (2021). *Modern Mathematical Statistics with Applications*. Springer Nature, Cham, Switzerland.

Matematisk institutt, Universitetet i Oslo
Email address: emilas@math.uio.no