FORMELSAMLING TIL STK1100 OG STK1110

(Versjon av 16. mai 2011)

1. Sannsynlighet

La $A, B, A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots$ være begivenheter, dvs. delmengder av et utfallsrom Ω.

a) Aksiomene:
Et sannsynlighetsmål P er en funksjon fra delmengder av utfallsrommet Ω til de reelle tall som tilfredsstiller

$$
\begin{aligned}
&P(\Omega) = 1 \\
&P(A) \geq 0 \\
&P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) \quad \text{hvis } A_1 \cap A_2 = \emptyset \\
&P\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \quad \text{hvis } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ for } i \neq j
\end{aligned}
$$

b) $P(A') = 1 - P(A)$

c) $P(\emptyset) = 0$

d) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

e) Addisjonsetningen:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

f) Betinget sannsynlighet:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{hvis } P(B) > 0$$

g) Total sannsynlighet:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i) \quad \text{hvis } \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega \text{ og } B_i \cap B_j = \emptyset \text{ for } i \neq j$$

h) Bayes' setning:

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)} \quad \text{under samme betingelser som i g)}$$

i) A og B er uavhengige begivenheter hvis $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

j) $A_1, \ldots, A_n$ er uavhengige begivenheter dersom

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_m}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_m})$$

for alle delmengder av indekser $i_1, i_2, \ldots, i_m$

k) <u>Produktsetningen:</u>

$$\begin{aligned} &P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \\ &\quad = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \end{aligned}$$

2. Kombinatorikk

a) To operasjoner som kan gjøres på henholdsvis n og m måter kan kombineres på $n \cdot m$ måter.

b) Antall ordnete utvalg med tilbakelegging av r elementer fra en mengde med n elementer er n^r

c) Antall ordnete utvalg uten tilbakelegging av r elementer fra en mengde med n elementer er $n(n-1)\cdots(n-r+1)$

d) Antall måter n elementer kan ordnes i rekkefølge på (permuteres) er $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$

e) Antall ikke-ordete utvalg av r elementer fra en mengde med n elementer er

$$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

f) Antall måter en mengde med n elementer kan deles inn i r delmengder med n_i elementer i den i-te delmengden er

$$\binom{n}{n_1\ n_2\ \cdots\ n_r} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\cdots\,n_r!}$$

3. Sannsynlighetsfordelinger

a) For en stokastisk variabel X (diskret eller kontinuerlig) er den kumulative fordelings-funksjonen $F(x) = P(X \leq x)$

b) For en diskret stokastisk variabel X som kan anta verdiene $x_1, x_2, x_3, \ldots$ har vi

$$p(x_j) = P(X = x_j)$$
$$F(x) = \sum_{x_j \leq x} p(x_j)$$

Betingelsene for at $p(x_j)$ skal være en punktsannsynlighet er

$$p(x_j) \geq 0 \quad \text{for alle } j$$
$$\sum_j p(x_j) = 1$$

c) For en kontinuerlig stokastisk variabel X har vi

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$
$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u)du$$
$$f(x) = F'(x)$$

Betingelsene for at $f(x)$ skal være en sannsynlighetstetthet er

$$f(x) \geq 0$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

d) For to stokastiske variabler X og Y (diskrete eller kontinuerlige) er den simultane kumulative fordelingsfunksjonen $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$

e) For diskrete stokastiske variabler X og Y som kan anta henholdsvis verdiene $x_1, x_2, \ldots$ og $y_1, y_2, \ldots$ har vi

$$p(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$$
$$F(x, y) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p(x_i, y_j)$$

Betingelsene for at $p(x_i, y_j)$ skal være en simultan punktsannsynlighet er analoge til betingelsene i b)

f) For kontinuerlige stokastiske variabler X og Y har vi

$$P\,(\,(X,Y)\in A\,) = \int\int_A f(u,v)dvdu$$

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)dvdu$$

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$$

Betingelsene for at $f(x,y)$ skal være en simultan sannsynlighetstetthet er analoge til betingelsene i c)

g) Marginale punktsannsynligheter:

$$p_X(x_i) = \sum_j p(x_i,y_j) \qquad \text{(for } X\text{)}$$

$$p_Y(y_j) = \sum_i p(x_i,y_j) \qquad \text{(for } Y\text{)}$$

h) Marginale sannsynlighetstettheter:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \qquad \text{(for } X\text{)}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx \qquad \text{(for } Y\text{)}$$

i) Uavhengighet:

De stokastiske variablene X og Y er uavhengige dersom

$$p(x_i,y_j) = p_X(x_i)p_Y(y_j) \qquad \text{(diskret)}$$

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y) \qquad \text{(kontinuerlig)}$$

j) Betingete punktsannsynligheter:

$$p_{X|Y}(x_i|y_j) = \frac{p(x_i,y_j)}{p_Y(y_j)} \qquad \text{(for } X \text{ gitt } Y = y_j\text{)}$$

$$p_{Y|X}(y_j|x_i) = \frac{p(x_i,y_j)}{p_X(x_i)} \qquad \text{(for } Y \text{ gitt } X = x_i\text{)}$$

Det forutsettes at $p_Y(y_j) > 0$ og $p_X(x_i) > 0$, henholdsvis. De betingete punktsannsynlighetene kan behandles som vanlige punktsannsynligheter.

k) <u>Betingete sannsynlighetstettheter</u>:

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} \qquad \text{(for } X \text{ gitt } Y = y\text{)}$$
$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \qquad \text{(for } Y \text{ gitt } X = x\text{)}$$

Det forutsettes at $f_Y(y) > 0$ og $f_X(x) > 0$, henholdsvis. De betingete sannsynlighetstetthetene kan behandles som vanlige synlighetstettheter.

4. Forventning

a) Forventningsverdien til en stokastisk variabel X er definert ved

$$E(X) = \sum_j x_j p(x_j) \qquad \text{(diskret)}$$
$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \qquad \text{(kontinuerlig)}$$

b) For en reell funksjon $g(X)$ av en stokastisk variabel X er

$$E[g(X)] = \sum_j g(x_j)p(x_j) \qquad \text{(diskret)}$$
$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx \qquad \text{(kontinuerlig)}$$

c) $E(a + bX) = a + bE(X)$

d) For en reell funksjon $g(X, Y)$ av to stokastiske variabler X og Y er

$$E\big[g(X,Y)\big] = \sum_i \sum_j g(x_i, y_j)p(x_i, y_j) \qquad \text{(diskret)}$$
$$E\big[g(X,Y)\big] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y)f(x,y)dydx \qquad \text{(kontinuerlig)}$$

e) Hvis X og Y er uavhengige er $E\big[g(X)h(Y)\big] = E\big[g(X)\big] \cdot E\big[h(Y)\big]$

f) Hvis X og Y er uavhengige er $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$

g) $E\left(a + \sum_{i=1}^{n} b_i X_i\right) = a + \sum_{i=1}^{n} b_i E(X_i)$

h) Betinget forventning:

$$\mathrm{E}(Y|X=x_i) = \sum_j y_j p_{Y|X}(y_j|x_i) \qquad \text{(diskret)}$$

$$\mathrm{E}(Y|X=x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x)dy \qquad \text{(kontinuerlig)}$$

5. Varians og standardavvik

a) Variansen og standardavviket til en stokastisk variabel X er definert ved

$$\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}[(X-\mu)^2]$$
$$\mathrm{sd}(X) = \sqrt{\mathrm{V}(X)}$$

b) $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \big(\mathrm{E}(X)\big)^2$

c) $\mathrm{V}(a+bX) = b^2\,\mathrm{V}(X)$

d) Hvis $X_1, \ldots, X_n$ er uavhengige har vi

$$\mathrm{V}\left(a + \sum_{i=1}^{n} b_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} {b_i}^2\,\mathrm{V}(X_i)$$

e)

$$\mathrm{V}\left(a + \sum_{i=1}^{n} b_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} {b_i}^2\,\mathrm{V}(X_i) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i} b_i b_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$$

f) Chebyshev's ulikhet:

La X være en stokastisk variabel med $\mu = \mathrm{E}(X)$ og $\sigma^2 = \mathrm{V}(X)$.
For alle $t > 0$ har vi

$$P(|X-\mu| > t) \leq \frac{\sigma^2}{t^2}$$

6. Kovarians og korrelasjon

a) La X og Y være stokastiske variabler med $\mu_X = \mathrm{E}(X)$, $\sigma_X^2 = \mathrm{V}(X)$, $\mu_Y = \mathrm{E}(Y)$ og $\sigma_Y^2 = \mathrm{V}(Y)$. Da er kovariansen og korrelasjonen til X og Y definert ved

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}\big[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\big]$$
$$\rho = \mathrm{Corr}(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$$

b) $\mathrm{Cov}(X,X) = \mathrm{V}(X)$

c) $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$

d) X, Y uavhengige $\Rightarrow \mathrm{Cov}(X,Y) = 0$

e)

$$\mathrm{Cov}\left(a + \sum_{i=1}^{n} b_i X_i \,,\, c + \sum_{j=1}^{m} d_j Y_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_i d_j \mathrm{Cov}(X_i, Y_j)$$

f) $-1 \leq \mathrm{Corr}(X,Y) \leq 1$ og $\mathrm{Corr}(X,Y) = \pm 1$ hvis og bare hvis det finnes to tall a, b slik at $Y = a + bX$ (bortsett, eventuelt, på et område med sannsynlighet 0)

7. Momentgenererende funksjoner

a) For en stokastisk variabel X (diskret eller kontinuerlig) er den momentgenererende funksjonen $M_X(t) = \mathrm{E}(e^{tX})$

b) Hvis den momentgenererende funksjonen $M_X(t)$ eksisterer for t i et åpent intervall som inneholder null, så bestemmer den entydig fordelingen til X

c) Hvis den momentgenererende funksjonen $M_X(t)$ eksisterer for t i et åpent intervall som inneholder null, så eksisterer alle momenter til X, og vi kan finne det r-te momentet ved $\mathrm{E}(X^r) = M_X^{(r)}(0)$

d) $M_{a+bX}(t) = e^{at} M_X(bt)$

e) Hvis X og Y er uavhengige er $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$

8. Noen diskrete sannsynlighetsfordelinger

a) Binomisk fordeling:

Punktsannsynlighet: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad k = 0, 1, \ldots, n$

Momentgenererende funksjon : $M_X(t) = (1 - p + pe^t)^n$

Forventning: $\mathrm{E}(X) = np$

Varians : $\mathrm{V}(X) = np(1-p)$

Tilnærmelse 1: $Z = \dfrac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ er tilnærmet standard normalfordelt når np og $n(1-p)$ begge er tilstrekkelig store (minst 10)

Tilnærmelse 2: X er tilnærmet Poisson fordelt med parameter $\lambda = np$ når n er stor og p er liten

Addisjonsregel: $X \sim$ binomisk (n, p), $Y \sim$binomisk (m, p)
og X, Y uavhengige $\Rightarrow X + Y \sim$ binomisk $(n + m, p)$

b) Geometrisk fordeling:

Punktsannsynlighet: $P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p \qquad k = 1, 2, \ldots$

Momentgenererende funksjon : $M_X(t) = e^t p/[1 - (1 - p)e^t]$

Forventning: $\mathrm{E}(X) = 1/p$

Varians: $\mathrm{V}(x) = (1 - p)/p^2$

Addisjonsregel: Hvis X er geometrisk fordelt med sannsynlighet p så er $X - 1$ negativt binomisk $(1, p)$. Derfor hvis X og Y er geometrisk fordelte med samme p og uavhengige så er $X + Y - 2$ negativt binomisk $(2, p)$

c) Negativ binomisk fordeling:

Punktsannsynlighet: $P(X = k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1 - p)^k \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$

Momentgenererende funksjon : $M_X(t) = \{p/[1 - (1 - p)e^t]\}^r$

Forventning: $\mathrm{E}(X) = r(1 - p)/p$

Varians: $\mathrm{V}(X) = r(1 - p)/p^2$

Addisjonsregel: $X \sim$ negativ binomisk (r_1, p),
$Y \sim$ negativt binomisk (r_2, p)
og X, Y uavhengige
$\Rightarrow X + Y \sim$ negativt binomisk $(r_1 + r_2, p)$

d) Hypergeometrisk fordeling:

Punktsannsynlighet: $P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{n}{n}}$

Forventning: $\mathrm{E}(X) = n \cdot \frac{M}{N}$

Varians: $\mathrm{V}(X) = n\frac{M}{N}(1 - \frac{M}{N})\frac{N-n}{N-1}$

Tilnærmelse: X er tilnærmet binomisk $(m, \frac{r}{n})$ når m er mye mindre enn n

e) Poisson fordelingen:

Punktsannsynlighet: $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad k = 0, 1, \ldots$

Momentgenererende funksjon : $M_X(t) = e^{\lambda(e^t - 1)}$

Forventning: $\mathrm{E}(X) = \lambda$

Varians: $\mathrm{V}(X) = \lambda$

Tilnærmelse: $Z = \dfrac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ er tilnærmet standard normalfordelt
når λ er tilstrekkelig stor (minst 10)

Addisjonsregel: $X \sim$Poisson (λ_1), $Y \sim$Poisson (λ_2)
og X, Y uavhengige $\Rightarrow X + Y \sim$ Poisson $(\lambda_1 + \lambda_2)$

e) Multinomisk fordeling:

Punktsannsynlighet: $P(N_1 = n_1, \ldots, N_r = n_r) = \frac{n!}{n_1! \cdots n_r!} p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r}$
Her er $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$ og $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$

Marginalfordeling: $N_i \sim$ binomisk (n, p_i)

9. Noen kontinuerlige sannsynlighetsfordelinger

a) Normalfordelingen:

Tetthet: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$ $\quad -\infty < x < \infty$

Momentgenererende funksjon : $M_X(t) = e^{\mu t} e^{\sigma^2 t^2/2}$

Forventning: $\mathrm{E}(X) = \mu$

Varians: $\mathrm{V}(X) = \sigma^2$

Transformasjon: $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow a + bX \sim N(a + b\mu, b^2\sigma^2)$
$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

Addisjonsregel: $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$, $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$, X, Y uavhengige
$\Rightarrow X + Y \sim N(\mu_X + \mu_Y, \sigma_X^2 + \sigma_Y^2)$

b) Eksponentialfordelingen:

Tetthet: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $\quad x > 0$

Momentgenererende funksjon : $M_X(t) = \lambda/(\lambda - t)$ for $t < \lambda$

Forventning: $\mathrm{E}(X) = 1/\lambda$

Varians: $\mathrm{V}(X) = 1/\lambda^2$

Addisjonsregel: $X \sim \exp(\lambda)$, $Y \sim \exp(\lambda)$, X og Y uavhengige
$\Rightarrow X + Y \sim \text{gamma}(2, 1/\lambda)$

c) Gammafordelingen:

Tetthet: $f(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}$ $\quad x > 0$

Gammafunksjonen: $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1}e^{-u}du$
$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$
$\Gamma(n) = (n-1)!$ når n er et helt tall
$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(1) = 1$

Momentgenererende funksjon : $M_X(t) = [1/(1-\beta t)]^\alpha$

Forventning: $\mathrm{E}(X) = \alpha\beta$

Varians: $\mathrm{V}(X) = \alpha\beta^2$

Addisjonsregel: $X \sim \text{gamma}(\alpha, \beta), \quad Y \sim \text{gamma}(\delta, \beta)$,
X og Y uavhengige $\Rightarrow X + Y \sim \text{gamma}(\alpha + \delta, \beta)$

d) <u>Kji-kvadratfordelingen</u>:

Tetthet: $f(v) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} v^{(n/2)-1} e^{-v/2} \qquad v > 0$
n er antall frihetsgrader

Forventning: $\mathrm{E}(V) = n$

Varians: $\mathrm{V}(V) = 2n$

Addisjonsregel: $U \sim \chi^2_n$, $V \sim \chi^2_m$, U og V uavhengige
$\Rightarrow U + V \sim \chi^2_{n+m}$

Resultat: $Z \sim N(0, 1) \Rightarrow Z^2 \sim \chi^2_1$

e) <u>Students t-fordeling</u>:

Tetthet: $f(t) = \frac{\Gamma[(n+1)/2]}{\sqrt{n\pi}\Gamma(n/2)}(1 + \frac{t^2}{n})^{-(n+1)/2} \qquad -\infty < t < \infty$
n er antall frihetsgrader

Forventning: $\mathrm{E}(T) = 0 \qquad (n \geq 2)$

Varians: $\mathrm{V}(T) = n/(n-2) \qquad (n \geq 3)$

Resultat: $Z \sim N(0, 1), \quad U \sim \chi^2_n, \quad Z, U$ uavhengige $\Rightarrow Z/\sqrt{U/n} \sim t_n$

f) <u>Binormal fordeling</u>:

Tetthet:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_X)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-\mu_Y)^2}{\sigma_Y^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right]\right\}$$

Marginalfordeling: $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2), \quad Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$

Korrelasjon: $\mathrm{Corr}(X, Y) = \rho$

Betinget fordeling: Gitt $X = x$ er Y normalfordelt med
forventning $\mathrm{E}(Y|X = x) = \mu_Y + \rho\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - \mu_X)$
og varians $\mathrm{V}(Y|X = x) = \sigma_Y^2(1 - \rho^2)$

10. Ett normalfordelt utvalg

Hvis $X_1, X_2, \ldots, X_n$ er uavhengige og $N(\mu, \sigma^2)$-fordelte så har vi at:

a) $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ og $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ er uavhengige

b) $\overline{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$

c) $(n-1)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-1}$

d) $\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$

11. To normalfordelte utvalg

La $X_1, X_2, \ldots, X_n$ være uavhengige og $N(\mu_X, \sigma^2)$-fordelte, og $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ uavhengige og $N(\mu_Y, \sigma^2)$-fordelte. De to utvalgene er uavhengige av hverandre. La $\overline{X}$, $\overline{Y}$, S_X^2 og S_Y^2 være definert i henhold til 10a). Da har vi at:

a) $S_p^2 = [(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2]/(m+n-2)$ er en vektet estimator for σ^2

b) $\overline{X} - \overline{Y} \sim N\left(\mu_X - \mu_Y, \sigma^2(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})\right)$

c) $(n+m-2)S_p^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{m+n-2}$

d) $\frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_X-\mu_Y)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{m}}} \sim t_{m+n-2}$

12. Regresjonsanalyse

Anta at $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i\,;\ i = 1, 2, \ldots, n\,;$ hvor x_i-ene er kjente tall og ϵ_i-ene er uavhengige og $N(0, \sigma^2)$-fordelte. Da har vi at:

a) Minste kvadraters estimatorer for β_0 og β_1 er

$$\hat{\beta}_0 = \overline{Y} - \hat{\beta}_1\overline{x} \quad \text{og} \quad \hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

b) Estimatorene i a) er normalfordelte og forventningsrette, og

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}_0) = \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} \quad \text{og} \quad \mathrm{Var}(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

c) La SSE$= \sum\limits_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 x_i)^2$. Da er $S^2 = \mathrm{SSE}/(n-2)$ en forventningsrett estimator for σ^2, og $(n-2)S^2/\sigma^2 \sim \chi^2_{n-2}$