Hypotesetesting, Kap. 9

Ex A) Blodtrykksreduksjon pille A og B
μ_A = forv. red med A, kjent
X_i = blodtrykkred med B $\sim N(\mu_B, \sigma^2)$ uavh.
Er $\mu_A = \mu_B$ eller $\mu_B > \mu_A$

Ex B) $p_0 = 27.4\%$ stemte Ap : 2017
X = ant av 1000 som vil stemme Ap sept 2018
$\sim \text{Bin}(1000, p)$
Er $p = p_0$ ~~eller~~ $p \neq p_0$

Ett utvalgssituasjon $X_i \sim f(x; \theta)$ uif

Vil undersøke eller teste

Nullhypotese (Utgangshypotese) $H_0: \theta = \theta_0$ = null verdi, spesifisert.

mot Alternativ hypotese $H_a: \theta \neq \theta_0$ Tosidig alternativ

$H_a': \theta > \theta_0$
$H_a'': \theta < \theta_0$ Ensidige alternativer

sep 20-14:11

Vil ha en metode hvor H_0 ikke forkastes hvis forskjellen kan tilskrives tilfeldigheter.
Vil ha vesentlig evidens før vi forkaster H_0 / aksepterer H_a
Man sier ikke at H_0 aksepteres.
Merk: Asymmetri mellom H_0 og H_a

Analogi: Rettsak
H_0: Tiltalte er uskyldig
H_a: Tiltalte er skyldig
} Man er uskyldig inntil motsatte er bevist.

Analogi: Hypotetisk deduktiv metode
H_0: Trad teori
H_a: Ny teori
} Trenger vesentlig evidens før vi forkaster den tradisjonelle teorien.

sep 20-14:27

Til å avgjøre en hypotesetest benyttes en testobservator $T = T(X_1, \dots, X_n)$
og vi forkaster H_0 dersom T er stor nok.
Ex A) $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ uif, σ^2 kjent, og benytter testobs. $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$ for $H_0: \mu = \mu_0$ mot $H_a: \mu > \mu_0$.
Ex B) $X \sim \text{Bin}(n, p)$ $H_0: p = p_0$ mot $H_a: p > p_0$
Forkaster rimeligvis hvis X er stor nok.
Forkastningsområde $R = \{(x_1, \dots, x_n): H_0$ forkastes.
I Eks A vil man typisk forkaste hvis $Z > 1.64$ = 95 persentil i N(0,1)
eller $\bar{X} > \mu_0 + 1{,}64 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
og forkastningsområdet $R = \{(x_1, \dots, x_n): \bar{x} > \mu_0 + 1{,}64 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\}$
I Eks B forkastes hvis $X \geq x_0$ hvor x_0 er minste verdi s.a. $P(X \geq x_0; p_0) = \sum_{x=x_0}^{n} \binom{n}{x} p_0^x (1-p_0)^{n-x} \leq 0.05 = \alpha$
og $R = \{x_0, x_0+1, \dots, n\}$
For å bestemme forkastningskriteriet / område må spesifisere signifikansnivået α.
Typisk er $\alpha = 0{,}05$, 0.01, 0.001

sep 20-14:43

Med gitt signifikansnivå α fastsettes testen ved å forkaste hvis $T \geq t$ for en kritisk verdi bestemt av at
$$P(T \geq t \mid H_0: \theta = \theta_0) = \begin{cases} \alpha & \text{kont. } X_i \\ \leq \alpha & \text{diskret f.} \end{cases}$$
Vi forkaster nullhypotesen på 5%, 1% og 1‰ nivå.
Ex A) Testobs. $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ under H_0
Dermed $P(Z > z \mid H_0: \mu = \mu_0) = \alpha = 0{,}05$ blir
$z = 1{,}64$ = 95 persentil i N(0,1)

Dersom $H_a: \mu \neq \mu_0$ benyttes testobs. $|Z| = \left|\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|$
Vil da forkaste H_0 med nivå $\alpha = 0{,}05$ dersom
$P(|Z| > z) = 0.05 \Rightarrow z = 1{,}96$
og vi forkaster når $\bar{x} < \mu_0 - 1{,}96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
eller $\bar{x} > \mu_0 + 1{,}96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

sep 20-15:17

Merk at vi kan gjøre to typer feil
Type I feil: Forkaste H_0 når H_0 er sann.
Type II feil: Beholde H_0 når H_a er sann.
I samsvar med asymmetrien: H_0 og H_a er vi mest (bedre: først) bekymret for Type I feil.
Derfor fastsetter vi testen, forkast H_0 når $T \geq t$, ved å fiksere
$P(\text{Type I feil}) = P(\text{Forkaste } H_0 \mid H_0 \text{ er sann}) = \alpha$
Deretter prøver vi å redusere $P(\text{Type II feil})$, bl.a.

- Øke utvalgsstørrelsen n
- Finne bedre testobservator

sep 20-15:26

Merk at
$$P(\text{Type II feil}) = P(\text{Ikke forkaste } H_0 \text{ når } H_a \text{ er sann}) = P(\text{Ikke forkaste } H_0 \mid \theta) = \beta(\theta) = \text{funksjon av } \theta.$$
Vil noen ganger heller se på styrkefunksjonen
$\gamma(\theta) = P(\text{Forkaste } H_0 \mid \theta)$
som kan betraktes både $\theta = \theta_0$ og $\underline{H_a: \theta > \theta_0}$
For $\theta = \theta_0$ blir $\gamma(\theta_0) = P(\text{Forkaste } H_0 \mid \theta_0) = \alpha$
mens for $\theta > \theta_0$ blir
$$\gamma(\theta) = P(\text{Forkaste } H_0 \mid \theta) = 1 - \underbrace{P(\text{Ikke forkaste } H_0 \mid \theta)}_{\text{Type II feil}} = 1 - \beta(\theta)$$
Ser at denne funksjon også kan utvides til $\theta < \theta_0$

sep 20-15:35

I eks. $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $H_0: \mu = \mu_0$, $H_a: \mu > \mu_0$, nivå α hvis σ kjent.
forkastes det når $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} > z_\alpha$

Dermed blir styrkefunksjonen lik
$\gamma(\mu) = P(\text{Forkaste } H_0 \mid \mu) = P(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha \mid \mu)$

$= P(\frac{\bar{X} - \mu + \mu - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha \mid \mu)$

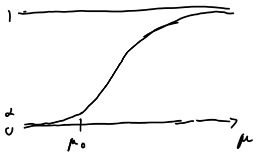
$= P(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} > z_\alpha - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \mid \mu)$

$= 1 - \Phi(z_\alpha - \frac{\mu - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}})$ der Φ = kum for $N(0,1)$

siden $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ generelt.

Spesielt $\gamma(\mu_0) = 1 - \Phi(z_\alpha) = 1 - (1 - \alpha) = \alpha$

og $\gamma(\mu)$ er voksende i μ, $\gamma(\mu) \to 1$ $\mu \to \infty$
$\gamma(\mu) \to 0$ $\mu \to -\infty$



sep 20-15:42

Hvordan tester vi $H_0: \mu = \mu_0$ mot $H_a: \mu > \mu_0$ når σ er ukjent?

Vet at $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$ når $\mu = \mu_0$ og S = emp. stdavvik

Med nivå α fastsettes forkastningskriteriet ved
$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} > t_\alpha = (1-\alpha)100$ pers. i t_{n-1} ford.

$\Rightarrow P(\text{Forkaste } H_0 \mid \mu = \mu_0) = \alpha$.

Forkast når $\bar{x} > \mu_0 + t_\alpha \frac{S}{\sqrt{n}}$

Med altenativ $H_a: \mu \neq \mu_0$ forkastes tilsv. når $|T| = |\frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}| > t_{\alpha/2}$

Dette er t-testen!

sep 20-15:52