STK1110 - Statistiske metoder og dataanalyse høsten 2019
Løsningsforslag til oppgaver i læreboka for uke 42

Vinnie Ko & Ørnulf Borgan

October 16, 2019

Lærebok: *Modern Mathematical Statistics with Applications (2nd ed.)* - Devore & Berk

Exercise 10.3

Vi vil teste $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 5000$ mot $H_a : \mu_1 - \mu_2 > 5000$ med signifikansnivå $\alpha = 0.01$.

Her er σ_1^2 og σ_2^2 ukjente. Men siden både m og n er (forhodsvis) store, kan vi bruke testobservatoren på sidene 490-491 i læreboka (med $\Delta_0 = 5000$). Vi får

$$z = \frac{\overline{x} - \overline{y} - \Delta_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{m} + \frac{s_2^2}{n}}} = \frac{42500 - 36800 - 5000}{\sqrt{\frac{2200^2}{45} + \frac{1500^2}{45}}} = 1.76$$

```
> (42500-36800-5000)/sqrt(2200^2/45+1500^2/45)
[1] 1.763523
```

Vi bruker her en ensidig test. Det betyr at med $\alpha = 0.01$ forkaster vi H_0 hvis $z \geq z_{0.01} = 2.33$.

Men vi har $z = 1.76 < 2.33$, så vi forkaster ikke H_0.

Exercise 10.5

a) Vi vil teste $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = -1$ mot $H_a : \mu_1 - \mu_2 < -1$ med signifikansnivå $\alpha = 0.01$.

Den alternative hypotesen H_a sier at varmeutbyttet fra mennesker med Raynaud's syndrom er mere enn $1 cal/cm^2/min$ lavere enn for personer uten Raynaud's syndrom.

Siden σ_1^2 og σ_2^2 her er kjente, kan vi bruke tetobservatoren på side 486 i læreboka (med $\Delta_0 = -1$). Vi får

$$z = \frac{\overline{x} - \overline{y} - \Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} = \frac{0.64 - 2.05 - (-1)}{\sqrt{\frac{0.2^2}{10} + \frac{0.4^2}{10}}} = -2.90.$$

```
> (0.64-2.05-(-1))/sqrt(0.2^2/10+0.4^2/10)
[1] -2.899138
```

Vi bruker her en ensidig test. Det betyr at med $\alpha = 0.01$ forkaster vi H_0 hvis $z \leq -z_{0.01} = -2.33$.

Vi har $z = -2.90 < -2.33$, så vi forkaster H_0.

b) P-verdien er

$$p = \Phi(-2.90) = 0.0019$$

```
> pnorm(q=-2.899138, mean=0, sd=1)
[1] 0.001870951
```

c) Husk at vi har (jf. løsningen av oppgave 9.9):

	H_0 er sann	H_a er sann
Ikke forkast H_0	Riktig konklusjon $p = 1 - \alpha$	Type II feil $p = \beta$
Forkast H_0	Type I feil $p = \alpha$	Riktig konklusjon $p = 1 - \beta$ ($1 - \beta$ er teststyrken)

Vi har

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{0.2^2}{10} + \frac{0.4^2}{10}}} \sim N(0, 1)$$

Dermed er

$$\begin{aligned}
\beta(-1.2) &= P(\text{feil av type II} \,|\, \mu_1 - \mu_2 = -1.2) \\
&= P(\text{ikke forkast } H_0 \,|\, \mu_1 - \mu_2 = -1.2) \\
&= P\left(Z > -z_{0.01} \,|\, \mu_1 - \mu_2 = -1.2\right) \\
&= 1 - P\left(Z \leq -z_{0.01} \,|\, \mu_1 - \mu_2 = -1.2\right) \\
&= 1 - P\left(\frac{\overline{X} - \overline{Y} - (-1)}{\sqrt{\frac{0.2^2}{10} + \frac{0.4^2}{10}}} < -z_{0.01} \,|\, \mu_1 - \mu_2 = -1.2\right) \\
&= 1 - P\left(\frac{\overline{X} - \overline{Y} - (-1.2) + (1 - 1.2)}{\sqrt{\frac{0.2^2}{10} + \frac{0.4^2}{10}}} < -z_{0.01} \,|\, \mu_1 - \mu_2 = -1.2\right) \\
&= 1 - P\left(\frac{\overline{X} - \overline{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{0.2^2}{10} + \frac{0.4^2}{10}}} < -z_{0.01} - \frac{1 - 1.2}{\sqrt{\frac{0.2^2}{10} + \frac{0.4^2}{10}}} \,|\, \mu_1 - \mu_2 = -1.2\right) \\
&= 1 - \Phi\left(-z_{0.01} - \frac{1 - 1.2}{\sqrt{\frac{0.2^2}{10} + \frac{0.4^2}{10}}}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(-2.33 + 1.41\right) \\
&= 1 - \Phi\left(-0.91\right) \\
&= 0.819
\end{aligned}$$

d) Vi vil bestemme $m = n$ slik at sannsynligheten for feil av type II er 0.10 når $\mu_1 - \mu_2 = -1.2$.

Vi bestemmer da n av likningen:

$$0.10 = \beta(-1.2) = 1 - \Phi\left(-z_{0.01} - \frac{1 - 1.2}{\sqrt{\frac{0.2^2}{n} + \frac{0.4^2}{n}}}\right)$$

Det gir

$$
\begin{aligned}
0.10 &= 1 - \Phi\left(-z_{0.01} + \frac{0.2}{\sqrt{\frac{0.2}{n}}}\right) \\
&\iff 0.10 = 1 - \Phi\left(-z_{0.01} + \sqrt{0.2n}\right) \\
&\iff 0.90 = \Phi\left(-z_{0.01} + \sqrt{0.2n}\right) \\
&\iff -z_{0.01} + \sqrt{0.2n} = \Phi^{-1}(0.90) = z_{0.10} \\
&\iff \sqrt{0.2n} = z_{0.01} + z_{0.10} \\
&\iff n = 5\left(z_{0.01} + z_{0.10}\right)^2 = 5\left(2.33 + 1.28\right)^2 = 65.08
\end{aligned}
$$

```
> 5*(qnorm(1-0.9) + qnorm(1-0.99))^2
[1] 65.08469
```

Så, vi må ha $n = 66$ observasjoner i hver gruppe (vi runder opp til nærmeste heltall).

Exercise 10.11

a) Et estimat for differansen mellom forventet kaloriinntak for barn som ikke spiser fast food og barn som spiser fast food er

$$\overline{x} - \overline{y} = 2258 - 2637 = -379$$

Vi lager også et 95% konfidensintervall for den forventete forskjellen. Siden vi har mange observasjoner i hver gruppe, kan vi bruke konfidensintervallet gitt på side 493 i læreboka.

Et 95% konfidensintervall for differansen mellom forventet kaloriinntak for barn som ikke spiser fast food og barn som spiser fast food er dermed

$$
\begin{aligned}
&\left[\overline{x} - \overline{y} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s_1^2}{m} + \frac{s_2^2}{n}},\ \overline{x} - \overline{y} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{s_1^2}{m} + \frac{s_2^2}{n}}\right] \\
&= \left[2258 - 2637 - 1.96\sqrt{\frac{1519^2}{663} + \frac{1138^2}{413}},\ 2258 - 2637 + 1.96\sqrt{\frac{1519^2}{663} + \frac{1138^2}{413}}\right] \\
&= [-538.42, -219.58]
\end{aligned}
$$

```
> c(
+   2258 - 2637 - qnorm(0.975)*sqrt(1519^2/663+1138^2/413),
+   2258 - 2637 + qnorm(0.975)*sqrt(1519^2/663+1138^2/413)
+ )
[1] -538.4197  -219.5803
```

b) Vi vil teste $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = -200$ mot $H_a : \mu_1 - \mu_2 < -200$ (der gruppe 1 er barn som ikke spiser fast food og gruppe 2 er barn som spiser fast food).

Siden både m og n er store, kan vi bruke testobservatoren på sidene 490-491 i læreboka (med $\Delta_0 = -200$). Vi får

$$z = \frac{\overline{x} - \overline{y} - \Delta_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{m} + \frac{s_2^2}{n}}} = \frac{2258 - 2637 - (-200)}{\sqrt{\frac{1519^2}{663} + \frac{1138^2}{413}}} = -2.20.$$

P-verdien er $p = \Phi(-2.20) = 0.014$.

Siden P-verdien er mindre enn 0.05, forkaster vi H_0 når signifikansnivået er 5%.

```
> (2258 - 2637 - 200)/sqrt(1519^2/663+1138^2/413)
[1] -2.200691
> pnorm(-2.200691)
[1] 0.01387894
```

Exercise 10.26

Vi vil bestemme konfidensintervallet som ikke forutsetter at variansene er like i de to gruppene. Vi bruker formelen på side 499 i læreboka for å bestemme antall frihetsgrader:

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{m} + \frac{s_2^2}{n}\right)^2}{\frac{\left(s_1^2/m\right)^2}{m-1} + \frac{\left(s_2^2/n\right)^2}{n-1}} = \frac{\left(\frac{11.3^2}{6} + \frac{8.3^2}{8}\right)^2}{\frac{(11.3^2/6)^2}{6-1} + \frac{(8.3^2/8)^2}{8-1}} = 8.83$$

Ved å gi kommandoen `qt(0.975,8.83)` i `R`, finner vi at $t_{0.025,\nu} = 2.269$ (merk at `R` tillater at antall frihetsgrader ikke er et heltall).

Nå bruker vi formelen på side 500 i læreboka for å bestemme et 95% konfidensintervall

$$\begin{aligned}
&\left[\overline{x} - \overline{y} - t_{\frac{\alpha}{2},\nu}\sqrt{\frac{s_1^2}{m} + \frac{s_2^2}{n}},\ \overline{x} - \overline{y} + t_{\frac{\alpha}{2},\nu}\sqrt{\frac{s_1^2}{m} + \frac{s_2^2}{n}}\right] \\
&= \left[40.3 - 21.4 - 2.269\sqrt{\frac{11.3^2}{6} + \frac{8.3^2}{8}},\ 40.3 - 21.4 + 2.269\sqrt{\frac{11.3^2}{6} + \frac{8.3^2}{8}}\right] \\
&= [6.49, 31.31].
\end{aligned}$$

Siden $0 \notin [6.49, 31.31]$, konkluderer vi med at μ_1 og μ_2 er forskjellige.

Hvis vi bruker $\overline{y} - \overline{x}$ i stedet for $\overline{x} - \overline{y}$, får vi konfidensintervallet $[-31.31, -6.49]$. Altså blir konfidensintervallet er "snudd". Det påvirker ikke konklusjonen.

Exercise 10.27

Vi vil teste $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 10$ mot $H_a : \mu_1 - \mu_2 > 10$ med signifikansnivå $\alpha = 0.10$.

Vi vil bruke testen som ikke forutsetter at variansene er like. Vi bruker formelen på side 499 i læreboka for å bestemme antall frihetsgrader:

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{m} + \frac{s_2^2}{n}\right)^2}{\frac{\left(s_1^2/m\right)^2}{m-1} + \frac{\left(s_2^2/n\right)^2}{n-1}} = \frac{\left(\frac{2.75^2}{10} + \frac{4.44^2}{5}\right)^2}{\frac{(2.75^2/10)^2}{10-1} + \frac{(4.44^2/5)^2}{5-1}} = 5.59$$

Vi beregner så testobservatoren gitt på side 501 (med $\Delta_0 = 10$):

$$t = \frac{\overline{x} - \overline{y} - \Delta_0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{m} + \frac{s_2^2}{n}}} = \frac{30.7 - 16.2 - 10}{\sqrt{\frac{2.75^2}{10} + \frac{4.44^2}{5}}} = 2.08.$$

P-veriden er $p = 1 - \Phi_\nu(2.08) = 0.0432$, der Φ_ν er den kumulative t-fordelingen med ν frihetsgrader. Siden P-verdien er mindre enn 0.10, forkaster vi H_0 på 10% nivå.

```
> # Data
> YF = c(29,34,33,27,28,32,31,34,32,27)
> OF = c(18,15,23,13,12)
>
> YF.n = length(YF)
```

```
> OF.n = length(OF)
>
> YF.mean = mean(YF)
> OF.mean = mean(OF)
> cat("YF.mean: ", YF.mean, ", OF.mean: ", OF.mean, "\n", sep="")
YF.mean: 30.7, OF.mean: 16.2
>
> YF.sd = sd(YF)
> OF.sd = sd(OF)
> print(YF.sd, OF.sd)
[1] 2.751
> cat("YF.sd: ", YF.sd, ", OF.sd: ", OF.sd, "\n", sep="")
YF.sd: 2.750757, OF.sd: 4.438468
>
> df.value = (YF.sd^2/YF.n + OF.sd^2/OF.n)^2/((YF.sd^2/YF.n)^2/(YF.n-1) + (OF.sd^2/OF.n)
    ^2/(OF.n-1))
> cat("df.value: ", df.value, "\n", sep="")
df.value: 5.592239
>
> test.statistic = (YF.mean - OF.mean - 10)/sqrt(YF.sd^2/YF.n + OF.sd^2/OF.n)
> cat("test.statistic: ", test.statistic, "\n", sep="")
test.statistic: 2.076432
>
> p.value = 1 - pt(q=test.statistic, df=df.value)
> cat("p.value: ", p.value, "\n", sep="")
p.value: 0.04327369
```

Exercise 10.49

a) Vi vil teste $H_0 : p_1 = p_2$ mot $H_a : p_1 \neq p_2$ med signifikansnivå $\alpha = 0.05$.

Vi vil bruker formelen på side 521 i læreboka for å regne ut testobservatoren. Vi har nå at

$$\widehat{p}_1 = \frac{60}{300} = 0.21, \qquad \widehat{p}_2 = \frac{75}{180} = 0.4167, \qquad \widehat{p} = \frac{63+75}{300+180} = 0.2875$$

Dermed blir testobservatoren:

$$z = \frac{\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2}{\sqrt{\widehat{p}\,(1-\widehat{p})\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}} = \frac{0.21 - 0.4167}{\sqrt{0.2875\,(1-0.2875)\left(\frac{1}{300}+\frac{1}{180}\right)}} = -4.84$$

En test med signifikansnivå 5% forkaster H_0 hvis $z \leq -1.96$ eller $z \geq 1.96$. Nå er $z = -4.84 \leq -1.96$, så vi forkaster H_0.

```
> p.1.hat = 63/300
> p.2.hat = 75/180
> p.hat = (63+75)/(300+180)
>
> test.statistic = (p.1.hat - p.2.hat)/sqrt(p.hat*(1-p.hat)*(1/300+1/180))
> cat("test.statistic: ", test.statistic, "\n", sep="")
test.statistic: -4.843233
```

b) Vi vil bruke formelen på side 522 i læreboka for å regne ut teststyrken (merk at formelen på side 522 gir sannsynligheten for feil av type II).

Vi har her at:

$$\overline{p} = \frac{mp_1 + np_2}{m+n} = \frac{300 \cdot 0.2 + 180 \cdot 0.4}{300+180} = 0.275$$

$$\overline{q} = 1 - \overline{p} = 1 - 0.275 = 0.725$$

$$\sigma = \sigma_{\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2} = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{m} + \frac{p_2(1-p_2)}{n}} = \sqrt{\frac{0.2(1-0.2)}{300} + \frac{0.4(1-0.4)}{180}} = 0.0432$$

Teststyrken blir dermed

$$
\begin{aligned}
\gamma(0.2, 0.4) &= 1 - \beta(0.2, 0.4) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)} - (p_1 - p_2)}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{-z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\overline{p}(1-\overline{p})\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)} - (p_1 - p_2)}{\sigma}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(\frac{1.96\sqrt{0.275(1-0.275)\left(\frac{1}{300}+\frac{1}{180}\right)} - (0.2 - 0.4)}{0.0432}\right) \\
&\quad + \Phi\left(-\frac{1.96\sqrt{0.275(1-0.275)\left(\frac{1}{300}+\frac{1}{180}\right)} - (0.2 - 0.4)}{0.0432}\right) \\
&= 1 - \Phi(6.54) + \Phi(2.72) \\
&= 0.9967
\end{aligned}
$$

```
> p.1 = 0.2
> p.2 = 0.4
> p.bar = (300*p.1+180*p.2)/(300+180)
> cat("p.bar: ", p.bar, "\n", sep="")
p.bar: 0.275
>
> sigma.value = sqrt(p.1*(1-p.1)/300 + p.2*(1-p.2)/180)
> cat("sigma.value: ", sigma.value, "\n", sep="")
sigma.value: 0.04320494
>
> value.1 = (qnorm(0.975)*sqrt(p.bar*(1-p.bar)*(1/300+1/180)) - (p.1-p.2))/sigma.value
> value.2 = (-qnorm(0.975)*sqrt(p.bar*(1-p.bar)*(1/300+1/180)) - (p.1-p.2))/sigma.value
> cat("value.1: ", value.1, ", value.2: ", value.2, "\n", sep="")
value.1: 6.538839, value.2: 2.719362
>
> power.value = 1 - pnorm(value.1) + pnorm(value.2)
> cat("power.value: ", power.value, "\n", sep="")
power.value: 0.9967296
```

Exercise 10.50

Vi vil teste $H_0 : p_1 = p_2$ mot $H_a : p_1 < p_2$ med signifikansnivå $\alpha = 0.10$.

Vi vil bruke formelen på side 521 i læreboka for å regne ut testobservatoren. Vi har nå at

$$
\widehat{p}_1 = \frac{104}{207} = 0.5024, \qquad \widehat{p}_2 = \frac{109}{213} = 0.5117, \qquad \widehat{p} = \frac{63+75}{300+180} = 0.5071
$$

Dermed blir testobservatoren:

$$
z = \frac{\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2}{\sqrt{\widehat{p}\,(1-\widehat{p})\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)}} = \frac{0.5024 - 0.5117}{\sqrt{0.5071\,(1-0.5071)\left(\frac{1}{207}+\frac{1}{213}\right)}} = -0.191
$$

P-verdien er $p = \Phi(-0.191) = 0.424$. Siden P-verdien er større enn 0.10 forkaster vi ikke H_0.

```
> p.1.hat = 104/207
> p.2.hat = 109/213
> p.hat = (104+109)/(207+213)
>
> test.statistic = (p.1.hat - p.2.hat)/sqrt(p.hat*(1-p.hat)*(1/207+1/213))
> cat("test.statistic: ", test.statistic, "\n", sep="")
test.statistic: -0.1910366
>
> p.value = pnorm(q=test.statistic)
> cat("p.value: ", p.value, "\n", sep="")
p.value: 0.4242485
```

Exercise 10.64

La σ_1^2 være variansen for vektøkningen for lavdosebehandlingen og la σ_2^2 være variansen for vektøkningen for kontrollgruppen.

Vi vil teste $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ mot $H_a : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$ med signifikansnivå $\alpha = 0.05$.

Vi bruker formelen på side 528 i læreboka for å regne ut testobservatoren:

$$f = \frac{s_1^2}{s_2^2} = \frac{54^2}{32^2} = 2.85$$

Vi bruker her en ensidig test. Det betyr at med $\alpha = 0.05$ forkaster vi H_0 hvis $f \geq F_{0.05,20-1,23-1} = 2.08$.

Vi har $f = 2.85 > 2.08$, så vi forkaster H_0.

```
> test.statistic = 54^2/32^2
> cat("test.statistic: ", test.statistic, "\n", sep="")
test.statistic: 2.847656
>
> critical.value = qf(p=0.95, df1=20-1, df2=23-1)
> cat("critical.value: ", critical.value, "\n", sep="")
critical.value: 2.083689
```

Exercise 10.66

Vi bruker formelen på side 530 i læreboka for å bestemme et 90% konfidensintervall for σ_1^2/σ_2^2.

Med $\alpha = 0.10$ finner vi konfidensintervallet:

$$\left[\frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2},m-1,n-1}}, \frac{s_1^2}{s_2^2} \cdot \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2},m-1,n-1}}\right] = \left[\frac{0.160^2}{0.074^2} \cdot \frac{1}{9.277}, \frac{0.160^2}{0.074^2} \cdot \frac{1}{0.108}\right] = [0.506, 43.51]$$

```
> alpha = 0.10
>
> data.1 = c(1.75,2.12,2.05,1.97)
> data.2 = c(1.77,1.59,1.7,1.69)
>
> m = length(data.1)
> n = length(data.2)
>
> s.1 = sd(data.1)
> s.2 = sd(data.2)
> cat("s.1: ", s.1, ", s.2: ", s.2, "\n", sep="")
s.1: 0.160494, s.2: 0.07410578
>
> c(
+   (s.1^2/s.2^2)/qf(1-alpha/2,df1=m-1,df2=n-1),
+   (s.1^2/s.2^2)/qf(alpha/2,df1=m-1,df2=n-1)
+ )
[1]  0.5056191  43.511472
```