STK1110 Høsten 2025

Innledning til Bayesiansk inferens

Tilsvarer Avsnitt 15.1 og 15.2

Bayes' teorem

Bayes' teorem

I Kap. 2.4 gis Bayes' teorem (setning) ved

Bayes' teorem

I Kap. 2.4 gis Bayes' teorem (setning) ved

$$\mathrm{P}(A_j|B) = \frac{\mathrm{P}(B|A_j)\mathrm{P}(A_j)}{\sum_k \mathrm{P}(B|A_k)\mathrm{P}(A_k)}$$

Bayes' teorem

I Kap. 2.4 gis Bayes' teorem (setning) ved

$$\mathrm{P}(A_j|B) = \frac{\mathrm{P}(B|A_j)\mathrm{P}(A_j)}{\sum_k \mathrm{P}(B|A_k)\mathrm{P}(A_k)}$$

der B er en begivenhet

Bayes' teorem

I Kap. 2.4 gis Bayes' teorem (setning) ved

$$\mathrm{P}(A_j|B) = \frac{\mathrm{P}(B|A_j)\mathrm{P}(A_j)}{\sum_k \mathrm{P}(B|A_k)\mathrm{P}(A_k)}$$

der B er en begivenhet med sannsynlighet $\mathrm{P}(B) > 0$

Bayes' teorem

I Kap. 2.4 gis Bayes' teorem (setning) ved

$$\mathrm{P}(A_j|B) = \frac{\mathrm{P}(B|A_j)\mathrm{P}(A_j)}{\sum_k \mathrm{P}(B|A_k)\mathrm{P}(A_k)}$$

der B er en begivenhet med sannsynlighet $\mathrm{P}(B) > 0$ og $A_1, A_2, \ldots$ en sekvens av disjunkte begivenheter

Bayes' teorem

I Kap. 2.4 gis Bayes' teorem (setning) ved

$$\mathrm{P}(A_j|B) = \frac{\mathrm{P}(B|A_j)\mathrm{P}(A_j)}{\sum_k \mathrm{P}(B|A_k)\mathrm{P}(A_k)}$$

der B er en begivenhet med sannsynlighet $\mathrm{P}(B) > 0$ og $A_1, A_2, \ldots$ en sekvens av disjunkte begivenheter med $\mathrm{P}(A_k) > 0$

Bayes' teorem

I Kap. 2.4 gis Bayes' teorem (setning) ved

$$\mathrm{P}(A_j|B) = \frac{\mathrm{P}(B|A_j)\mathrm{P}(A_j)}{\sum_k \mathrm{P}(B|A_k)\mathrm{P}(A_k)}$$

der B er en begivenhet med sannsynlighet $\mathrm{P}(B) > 0$ og $A_1, A_2, \ldots$ en sekvens av disjunkte begivenheter med $\mathrm{P}(A_k) > 0$ og med unionen av alle A_k lik utfallsrommet.

Bayes' teorem

I Kap. 2.4 gis Bayes' teorem (setning) ved

$$\mathrm{P}(A_j|B) = \frac{\mathrm{P}(B|A_j)\mathrm{P}(A_j)}{\sum_k \mathrm{P}(B|A_k)\mathrm{P}(A_k)}$$

der B er en begivenhet med sannsynlighet $\mathrm{P}(B) > 0$ og $A_1, A_2, \ldots$ en sekvens av disjunkte begivenheter med $\mathrm{P}(A_k) > 0$ og med unionen av alle A_k lik utfallsrommet.

Hvis (X, Y) har en bivariat diskret fordeling

Bayes' teorem

I Kap. 2.4 gis Bayes' teorem (setning) ved

$$\mathrm{P}(A_j|B) = \frac{\mathrm{P}(B|A_j)\mathrm{P}(A_j)}{\sum_k \mathrm{P}(B|A_k)\mathrm{P}(A_k)}$$

der B er en begivenhet med sannsynlighet $\mathrm{P}(B) > 0$ og $A_1, A_2, \ldots$ en sekvens av disjunkte begivenheter med $\mathrm{P}(A_k) > 0$ og med unionen av alle A_k lik utfallsrommet.

Hvis (X, Y) har en bivariat diskret fordeling med punktsannsynligheter $f_{XY}(x, y) = \mathrm{P}(X = x, Y = y)$

Bayes' teorem

I Kap. 2.4 gis Bayes' teorem (setning) ved

$$\mathrm{P}(A_j|B) = \frac{\mathrm{P}(B|A_j)\mathrm{P}(A_j)}{\sum_k \mathrm{P}(B|A_k)\mathrm{P}(A_k)}$$

der B er en begivenhet med sannsynlighet $\mathrm{P}(B) > 0$ og $A_1, A_2, \ldots$ en sekvens av disjunkte begivenheter med $\mathrm{P}(A_k) > 0$ og med unionen av alle A_k lik utfallsrommet.

Hvis (X, Y) har en bivariat diskret fordeling med punktsannsynligheter $f_{XY}(x, y) = \mathrm{P}(X = x, Y = y)$ så kan vi skrive om Bayes' setning til

Bayes' teorem

I Kap. 2.4 gis Bayes' teorem (setning) ved

$$\mathrm{P}(A_j|B) = \frac{\mathrm{P}(B|A_j)\mathrm{P}(A_j)}{\sum_k \mathrm{P}(B|A_k)\mathrm{P}(A_k)}$$

der B er en begivenhet med sannsynlighet $\mathrm{P}(B) > 0$ og $A_1, A_2, \ldots$ en sekvens av disjunkte begivenheter med $\mathrm{P}(A_k) > 0$ og med unionen av alle A_k lik utfallsrommet.

Hvis (X, Y) har en bivariat diskret fordeling med punktsannsynligheter $f_{XY}(x, y) = \mathrm{P}(X = x, Y = y)$ så kan vi skrive om Bayes' setning til

$$f_{Y|X}(y|x) = \mathrm{P}(Y = y|X = x)$$

Bayes' teorem

I Kap. 2.4 gis Bayes' teorem (setning) ved

$$\mathrm{P}(A_j|B) = \frac{\mathrm{P}(B|A_j)\mathrm{P}(A_j)}{\sum_k \mathrm{P}(B|A_k)\mathrm{P}(A_k)}$$

der B er en begivenhet med sannsynlighet $\mathrm{P}(B) > 0$ og $A_1, A_2, \ldots$ en sekvens av disjunkte begivenheter med $\mathrm{P}(A_k) > 0$ og med unionen av alle A_k lik utfallsrommet.

Hvis (X, Y) har en bivariat diskret fordeling med punktsannsynligheter $f_{XY}(x, y) = \mathrm{P}(X = x, Y = y)$ så kan vi skrive om Bayes' setning til

$$f_{Y|X}(y|x) = \mathrm{P}(Y = y|X = x) = \frac{f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)}{\sum_y f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)}$$

Bayes' teorem

I Kap. 2.4 gis Bayes' teorem (setning) ved

$$\mathrm{P}(A_j|B) = \frac{\mathrm{P}(B|A_j)\mathrm{P}(A_j)}{\sum_k \mathrm{P}(B|A_k)\mathrm{P}(A_k)}$$

der B er en begivenhet med sannsynlighet $\mathrm{P}(B) > 0$ og $A_1, A_2, \ldots$ en sekvens av disjunkte begivenheter med $\mathrm{P}(A_k) > 0$ og med unionen av alle A_k lik utfallsrommet.

Hvis (X, Y) har en bivariat diskret fordeling med punktsannsynligheter $f_{XY}(x, y) = \mathrm{P}(X = x, Y = y)$ så kan vi skrive om Bayes' setning til

$$f_{Y|X}(y|x) = \mathrm{P}(Y = y|X = x) = \frac{f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)}{\sum_y f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)}$$

Hvis (X, Y) er en bivariat kontinuerlig fordeling med simultantettet $f_{XY}(x, y)$

Bayes' teorem

I Kap. 2.4 gis Bayes' teorem (setning) ved

$$\mathrm{P}(A_j|B) = \frac{\mathrm{P}(B|A_j)\mathrm{P}(A_j)}{\sum_k \mathrm{P}(B|A_k)\mathrm{P}(A_k)}$$

der B er en begivenhet med sannsynlighet $\mathrm{P}(B) > 0$ og $A_1, A_2, \ldots$ en sekvens av disjunkte begivenheter med $\mathrm{P}(A_k) > 0$ og med unionen av alle A_k lik utfallsrommet.

Hvis (X, Y) har en bivariat diskret fordeling med punktsannsynligheter $f_{XY}(x, y) = \mathrm{P}(X = x, Y = y)$ så kan vi skrive om Bayes' setning til

$$f_{Y|X}(y|x) = \mathrm{P}(Y = y|X = x) = \frac{f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)}{\sum_y f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)}$$

Hvis (X, Y) er en bivariat kontinuerlig fordeling med simultantettet $f_{XY}(x, y)$ så får vi en kontinuerlig variant av Bayes' setning gitt ved

Bayes' teorem

I Kap. 2.4 gis Bayes' teorem (setning) ved

$$\mathrm{P}(A_j|B) = \frac{\mathrm{P}(B|A_j)\mathrm{P}(A_j)}{\sum_k \mathrm{P}(B|A_k)\mathrm{P}(A_k)}$$

der B er en begivenhet med sannsynlighet $\mathrm{P}(B) > 0$ og $A_1, A_2, \ldots$ en sekvens av disjunkte begivenheter med $\mathrm{P}(A_k) > 0$ og med unionen av alle A_k lik utfallsrommet.

Hvis (X, Y) har en bivariat diskret fordeling med punktsannsynligheter $f_{XY}(x, y) = \mathrm{P}(X = x, Y = y)$ så kan vi skrive om Bayes' setning til

$$f_{Y|X}(y|x) = \mathrm{P}(Y = y|X = x) = \frac{f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)}{\sum_y f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)}$$

Hvis (X, Y) er en bivariat kontinuerlig fordeling med simultantettet $f_{XY}(x, y)$ så får vi en kontinuerlig variant av Bayes' setning gitt ved

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)}{\int f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)dy}$$

Bayes' teorem

I Kap. 2.4 gis Bayes' teorem (setning) ved

$$\mathrm{P}(A_j|B) = \frac{\mathrm{P}(B|A_j)\mathrm{P}(A_j)}{\sum_k \mathrm{P}(B|A_k)\mathrm{P}(A_k)}$$

der B er en begivenhet med sannsynlighet $\mathrm{P}(B) > 0$ og $A_1, A_2, \ldots$ en sekvens av disjunkte begivenheter med $\mathrm{P}(A_k) > 0$ og med unionen av alle A_k lik utfallsrommet.

Hvis (X, Y) har en bivariat diskret fordeling med punktsannsynligheter $f_{XY}(x, y) = \mathrm{P}(X = x, Y = y)$ så kan vi skrive om Bayes' setning til

$$f_{Y|X}(y|x) = \mathrm{P}(Y = y|X = x) = \frac{f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)}{\sum_y f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)}$$

Hvis (X, Y) er en bivariat kontinuerlig fordeling med simultantettet $f_{XY}(x, y)$ så får vi en kontinuerlig variant av Bayes' setning gitt ved

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)}{\int f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)dy} = \frac{f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)}{f_X(x)}$$

Bayesiansk inferens

Bayesiansk inferens

- Fram til nå har vi sett på modellparametere θ som ukjente,

Bayesiansk inferens

- Fram til nå har vi sett på modellparametere θ som ukjente, men faste verdier,

Bayesiansk inferens

- Fram til nå har vi sett på modellparametere θ som ukjente, men faste verdier, som er slik en gjør innen frekventistisk inferens.

Bayesiansk inferens

- Fram til nå har vi sett på modellparametere θ som ukjente, men faste verdier, som er slik en gjør innen frekventistisk inferens.
  - Kalles også ofte klassisk statistikk

Bayesiansk inferens

- Fram til nå har vi sett på modellparametere θ som ukjente, men faste verdier, som er slik en gjør innen frekventistisk inferens.
  - Kalles også ofte klassisk statistikk
- I Bayesiansk inferens behandler en i stedet parameterne som stokastiske variabler,

Bayesiansk inferens

- Fram til nå har vi sett på modellparametere θ som ukjente, men faste verdier, som er slik en gjør innen frekventistisk inferens.
  - Kalles også ofte klassisk statistikk
- I Bayesiansk inferens behandler en i stedet parameterne som stokastiske variabler, som følger en viss fordeling.

Bayesiansk inferens

- Fram til nå har vi sett på modellparametere θ som ukjente, men faste verdier, som er slik en gjør innen frekventistisk inferens.
  - Kalles også ofte klassisk statistikk
- I Bayesiansk inferens behandler en i stedet parameterne som stokastiske variabler, som følger en viss fordeling.
- Aprioriforddelingen ("prior distribution")

Bayesiansk inferens

- Fram til nå har vi sett på modellparametere θ som ukjente, men faste verdier, som er slik en gjør innen frekventistisk inferens.
  - Kalles også ofte klassisk statistikk
- I Bayesiansk inferens behandler en i stedet parameterne som stokastiske variabler, som følger en viss fordeling.
- Aprioriforddelingen ("prior distribution") til en parameter θ skal representere all tilgjengelig informasjon om denne

Bayesiansk inferens

- Fram til nå har vi sett på modellparametere θ som ukjente, men faste verdier, som er slik en gjør innen frekventistisk inferens.
  - Kalles også ofte klassisk statistikk
- I Bayesiansk inferens behandler en i stedet parameterne som stokastiske variabler, som følger en viss fordeling.
- Aprioriforddelingen ("prior distribution") til en parameter θ skal representere all tilgjengelig informasjon om denne som en har før en har observert data.

Bayesiansk inferens

- Fram til nå har vi sett på modellparametere θ som ukjente, men faste verdier, som er slik en gjør innen frekventistisk inferens.
  - Kalles også ofte klassisk statistikk
- I Bayesiansk inferens behandler en i stedet parameterne som stokastiske variabler, som følger en viss fordeling.
- Aprioriforde lingen ("prior distribution") til en parameter θ skal representere all tilgjengelig informasjon om denne som en har før en har observert data.
- Dette kan dreie seg om ekspertkunnskap,

Bayesiansk inferens

- Fram til nå har vi sett på modellparametere θ som ukjente, men faste verdier, som er slik en gjør innen frekventistisk inferens.
  - Kalles også ofte klassisk statistikk
- I Bayesiansk inferens behandler en i stedet parameterne som stokastiske variabler, som følger en viss fordeling.
- Aprioriforde lingen ("prior distribution") til en parameter θ skal representere all tilgjengelig informasjon om denne som en har før en har observert data.
- Dette kan dreie seg om ekspertkunnskap, sunn fornuft,

Bayesiansk inferens

- Fram til nå har vi sett på modellparametere θ som ukjente, men faste verdier, som er slik en gjør innen frekventistisk inferens.
  - Kalles også ofte klassisk statistikk
- I Bayesiansk inferens behandler en i stedet parameterne som stokastiske variabler, som følger en viss fordeling.
- Aprioriforddelingen ("prior distribution") til en parameter θ skal representere all tilgjengelig informasjon om denne som en har før en har observert data.
- Dette kan dreie seg om ekspertkunnskap, sunn fornuft, intuisjon,...

Bayesiansk inferens

- Fram til nå har vi sett på modellparametere θ som ukjente, men faste verdier, som er slik en gjør innen frekventistisk inferens.
  - Kalles også ofte klassisk statistikk
- I Bayesiansk inferens behandler en i stedet parameterne som stokastiske variabler, som følger en viss fordeling.
- Aprioriforde lingen ("prior distribution") til en parameter θ skal representere all tilgjengelig informasjon om denne som en har før en har observert data.
- Dette kan dreie seg om ekspertkunnskap, sunn fornuft, intuisjon,...
  - Prior beskriver vår kunnskap om parameteren gjennom en sannsynlighetsfordeling

Bayesiansk inferens

- Fram til nå har vi sett på modellparametere θ som ukjente, men faste verdier, som er slik en gjør innen frekventistisk inferens.
  - Kalles også ofte klassisk statistikk
- I Bayesiansk inferens behandler en i stedet parameterne som stokastiske variabler, som følger en viss fordeling.
- Aprioriforde lingen ("prior distribution") til en parameter θ skal representere all tilgjengelig informasjon om denne som en har før en har observert data.
- Dette kan dreie seg om ekspertkunnskap, sunn fornuft, intuisjon,...
  - Prior beskriver vår kunnskap om parameteren gjennom en sannsynlighetsfordeling
- I Bayesiansk inferens kombinerer en så denne forhåndskunnskapen med informasjon fra dataene

Bayesiansk inferens

- Fram til nå har vi sett på modellparametere θ som ukjente, men faste verdier, som er slik en gjør innen frekventistisk inferens.
  - Kalles også ofte klassisk statistikk
- I Bayesiansk inferens behandler en i stedet parameterne som stokastiske variabler, som følger en viss fordeling.
- Aprioriforddelingen ("prior distribution") til en parameter θ skal representere all tilgjengelig informasjon om denne som en har før en har observert data.
- Dette kan dreie seg om ekspertkunnskap, sunn fornuft, intuisjon,...
  - Prior beskriver vår kunnskap om parameteren gjennom en sannsynlighetsfordeling
- I Bayesiansk inferens kombinerer en så denne forhåndskunnskapen med informasjon fra dataene via aposteriorifordelingen ("posterior distribution").

Bayesiansk inferens (forts.)

Bayesiansk inferens (forts.)

- All inferens (punktestimering, intervallestimering,...) tar så utgangspunkt i aposteriorifordelingen.

Bayesiansk inferens (forts.)

- All inferens (punktestimering, intervallestimering,...) tar så utgangspunkt i aposterioriforddelingen.
- Det Bayesianske rammeverket gir en formell framgangsmåte for å inkludere forhåndskunnskap en har om fenomenet en modellerer.

Bayesiansk inferens (forts.)

- All inferens (punktestimering, intervallestimering,...) tar så utgangspunkt i aposteriorifordelingen.
- Det Bayesianske rammeverket gir en formell framgangsmåte for å inkludere forhåndskunnskap en har om fenomenet en modellerer.
- Bayesianske metoder er derfor særlig egnet i situasjoner der en har slik kunnskap.

Bayesiansk inferens (forts.)

- All inferens (punktestimering, intervallestimering,...) tar så utgangspunkt i aposteriorifordelingen.
- Det Bayesianske rammeverket gir en formell framgangsmåte for å inkludere forhåndskunnskap en har om fenomenet en modellerer.
- Bayesianske metoder er derfor særlig egnet i situasjoner der en har slik kunnskap.
- De gir også en veldig naturlig måte å uttrykke usikkerhet om parametere på, via aposteriorifordelingen.

Aprioriforde lingen

Apriorifordelingen

- Apriorifordelingen $\pi(\theta)$ til θ er en sannsynlighetsfordeling for alle mulige verdier av θ.

Apriorifordelingen

- Apriorifordelingen $\pi(\theta)$ til θ er en sannsynlighetsfordeling for alle mulige verdier av θ.
- Den må oppfylle $\pi(\theta) \geq 0$

Aprioriforde lingen

- Aprioriforde lingen $\pi(\theta)$ til θ er en sannsynlighetsforde ling for alle mulige verdier av θ.
- Den må oppfylle $\pi(\theta) \geq 0$ og

Apriorifordelingen

- Apriorifordelingen $\pi(\theta)$ til θ er en sannsynlighetsfordeling for alle mulige verdier av θ.
- Den må oppfylle $\pi(\theta) \geq 0$ og

$$\int_{-\infty}^{\infty} \pi(\theta) d\theta = 1$$

Apriorifordelingen

- Apriorifordelingen $\pi(\theta)$ til θ er en sannsynlighetsfordeling for alle mulige verdier av θ.
- Den må oppfylle $\pi(\theta) \geq 0$ og

$$\int_{-\infty}^{\infty} \pi(\theta) d\theta = 1 \qquad \text{hvis } \theta \text{ er kontinuerlig}$$

Aprioriforde lingen

- Aprioriforde lingen $\pi(\theta)$ til θ er en sannsynlighetsforde ling for alle mulige verdier av θ.
- Den må oppfylle $\pi(\theta) \geq 0$ og

$$\int_{-\infty}^{\infty} \pi(\theta) d\theta = 1 \qquad \text{hvis } \theta \text{ er kontinuerlig}$$
$$\sum_{\theta} \pi(\theta) = 1$$

Aprioriforde lingen

- Aprioriforde lingen $\pi(\theta)$ til θ er en sannsynlighetsforde ling for alle mulige verdier av θ.
- Den må oppfylle $\pi(\theta) \geq 0$ og

$$\begin{array}{ll} \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\theta) d\theta = 1 & \text{hvis } \theta \text{ er kontinuerlig} \\ \sum_{\theta} \pi(\theta) = 1 & \text{hvis } \theta \text{ er diskret.} \end{array}$$

Aprioriforde lingen

- Aprioriforde lingen $\pi(\theta)$ til θ er en sannsynlighetsforde ling for alle mulige verdier av θ.
- Den må oppfylle $\pi(\theta) \geq 0$ og

$$\begin{array}{ll} \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\theta) d\theta = 1 & \text{hvis } \theta \text{ er kontinuerlig} \\ \sum_{\theta} \pi(\theta) = 1 & \text{hvis } \theta \text{ er diskret.} \end{array}$$

- Dersom en er nokså sikker på hvilke verdier θ typisk antar,

Apriorifordelingen

- Apriorifordelingen $\pi(\theta)$ til θ er en sannsynlighetsfordeling for alle mulige verdier av θ.
- Den må oppfylle $\pi(\theta) \geq 0$ og

$$\begin{array}{ll} \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\theta) d\theta = 1 & \text{hvis } \theta \text{ er kontinuerlig} \\ \sum_{\theta} \pi(\theta) = 1 & \text{hvis } \theta \text{ er diskret.} \end{array}$$

- Dersom en er nokså sikker på hvilke verdier θ typisk antar, vil $\pi(\theta)$ være "smal",

Aprioriforde lingen

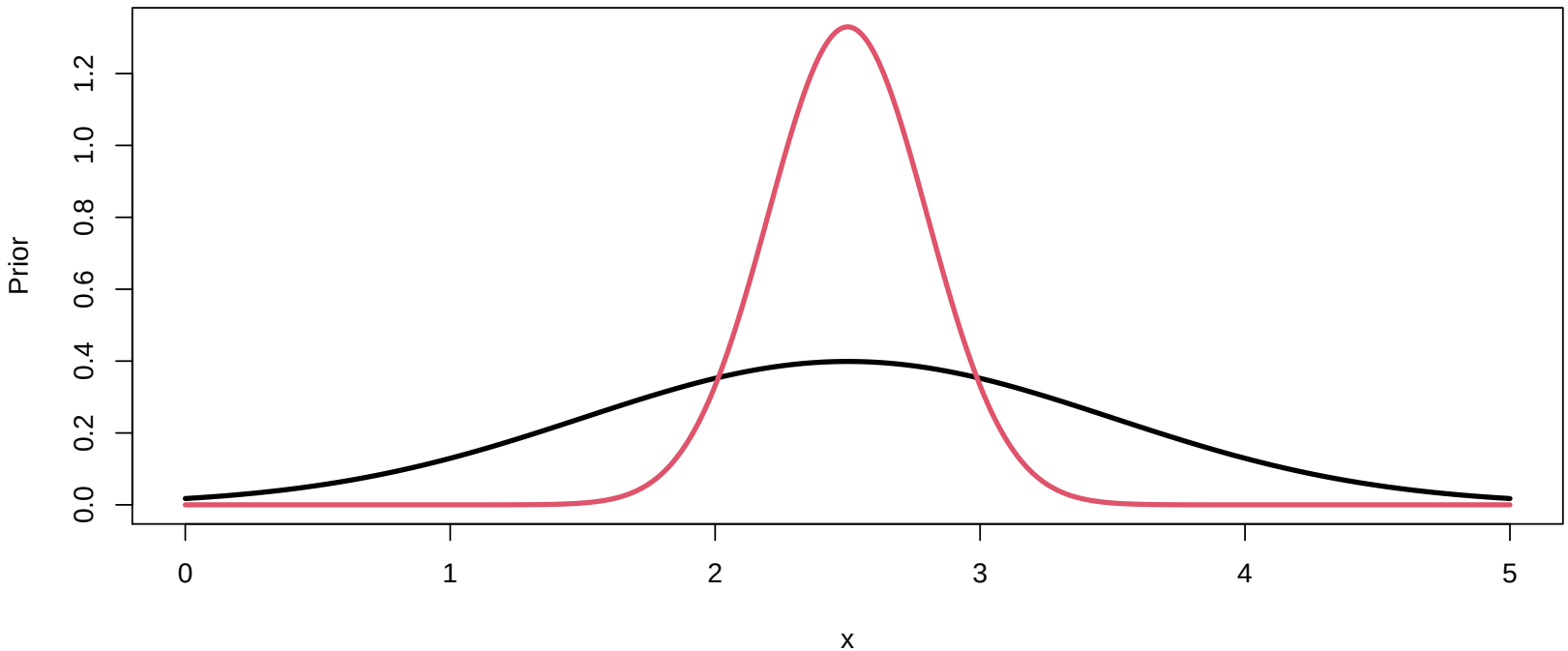
- Aprioriforde lingen $\pi(\theta)$ til θ er en sannsynlighetsforde ling for alle mulige verdier av θ.
- Den må oppfylle $\pi(\theta) \geq 0$ og

$$\begin{array}{ll} \int_{-\infty}^{\infty} \pi(\theta) d\theta = 1 & \text{hvis } \theta \text{ er kontinuerlig} \\ \sum_{\theta} \pi(\theta) = 1 & \text{hvis } \theta \text{ er diskret.} \end{array}$$

- Dersom en er nokså sikker på hvilke verdier θ typisk antar, vil $\pi(\theta)$ være "smal", mens hvis en er nokså usikker, vil $\pi(\theta)$ være "bred".

Eksempel aprioriforddelinger

Eksempel aprioriforfordelinger



Aposteriorifordelingen

Aposteriorifordelingen

- Anta $\theta \sim \pi(\theta)$

Aposteriorifordelingen

- Anta $\theta \sim \pi(\theta)$
- Anta $X|\theta \sim f(x|\theta)$

Aposteriorifordelingen

- Anta $\theta \sim \pi(\theta)$
- Anta $X|\theta \sim f(x|\theta)$
- Bayes teorem:

Aposteriorifordelingen

- Anta $\theta \sim \pi(\theta)$
- Anta $X|\theta \sim f(x|\theta)$
- Bayes teorem:

$$\pi(\theta|x) = \frac{\pi(\theta) f(x|\theta)}{f(x)}$$

Aposteriorifordelingen

- Anta $\theta \sim \pi(\theta)$
- Anta $X|\theta \sim f(x|\theta)$
- Bayes teorem:

$$\pi(\theta|x) = \frac{\pi(\theta) f(x|\theta)}{f(x)}$$

der

Aposteriorifordelingen

- Anta $\theta \sim \pi(\theta)$
- Anta $X|\theta \sim f(x|\theta)$
- Bayes teorem:

$$\pi(\theta|x) = \frac{\pi(\theta)f(x|\theta)}{f(x)}$$

der

$$f(x) = \begin{cases} \int_\theta \pi(\theta)f(x|\theta)d\theta & \theta \text{ kontinuerlig} \\ \sum_\theta \pi(\theta)f(x|\theta) & \theta \text{ diskret} \end{cases}$$

Aposteriorifordelingen

- Anta $\theta \sim \pi(\theta)$
- Anta $X|\theta \sim f(x|\theta)$
- Bayes teorem:

$$\pi(\theta|x) = \frac{\pi(\theta)f(x|\theta)}{f(x)}$$

der

$$f(x) = \begin{cases} \int_\theta \pi(\theta)f(x|\theta)d\theta & \theta \text{ kontinuerlig} \\ \sum_\theta \pi(\theta)f(x|\theta) & \theta \text{ diskret} \end{cases}$$

Aposteriorifordelingen

Aposteriorifordelingen

Aposteriorifordelingen

- Anta at $x_1, \ldots, x_n$ er observasjoner

Aposteriorifordelingen

- Anta at $x_1, \ldots, x_n$ er observasjoner av de stokastiske variablene $X_1, \ldots, X_n$,

Aposteriorifordelingen

- Anta at $x_1, \ldots, x_n$ er observasjoner av de stokastiske variablene $X_1, \ldots, X_n$, og la $f(x_1, \ldots, x_n|\theta)$ være simultantettheten eller punktsannsynligheten til $X_1, \ldots, X_n$,

Aposteriorifordelingen

- Anta at $x_1, \ldots, x_n$ er observasjoner av de stokastiske variablene $X_1, \ldots, X_n$, og la $f(x_1, \ldots, x_n|\theta)$ være simultantettheten eller punktsannsynligheten til $X_1, \ldots, X_n$, som avhenger av θ.

Aposteriorifordelingen

- Anta at $x_1, \ldots, x_n$ er observasjoner av de stokastiske variablene $X_1, \ldots, X_n$, og la $f(x_1, \ldots, x_n|\theta)$ være simultantettheten eller punktsannsynligheten til $X_1, \ldots, X_n$, som avhenger av θ.
- Da er sannsynlighetstettheten eller punktsannsynligheten til aposteriorifordelingen til θ gitt ved

Aposteriorifordelingen

- Anta at $x_1, \ldots, x_n$ er observasjoner av de stokastiske variablene $X_1, \ldots, X_n$, og la $f(x_1, \ldots, x_n|\theta)$ være simultantettheten eller punktsannsynligheten til $X_1, \ldots, X_n$, som avhenger av θ.
- Da er sannsynlighetstettheten eller punktsannsynligheten til aposteriorifordelingen til θ gitt ved

$$\pi(\theta|x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \frac{\pi(\theta)f(x_1,\ldots,x_n|\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} \pi(\theta)f(x_1,\ldots,x_n|\theta)d\theta}, & \theta \text{ er kontinuerlig} \\ \frac{\pi(\theta)f(x_1,\ldots,x_n|\theta)}{\sum_\theta \pi(\theta)f(x_1,\ldots,x_n|\theta)}, & \theta \text{ er diskret} \end{cases}.$$

Aposteriorifordelingen

- Anta at $x_1, \ldots, x_n$ er observasjoner av de stokastiske variablene $X_1, \ldots, X_n$, og la $f(x_1, \ldots, x_n|\theta)$ være simultantettheten eller punktsannsynligheten til $X_1, \ldots, X_n$, som avhenger av θ.
- Da er sannsynlighetstettheten eller punktsannsynligheten til aposteriorifordelingen til θ gitt ved

$$\pi(\theta|x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \frac{\pi(\theta)f(x_1,\ldots,x_n|\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} \pi(\theta)f(x_1,\ldots,x_n|\theta)d\theta}, & \theta \text{ er kontinuerlig} \\ \frac{\pi(\theta)f(x_1,\ldots,x_n|\theta)}{\sum_\theta \pi(\theta)f(x_1,\ldots,x_n|\theta)}, & \theta \text{ er diskret} \end{cases}.$$

- Legg merke til at nevner i uttrykkene over er konstanter,

Aposteriorifordelingen

- Anta at $x_1, \ldots, x_n$ er observasjoner av de stokastiske variablene $X_1, \ldots, X_n$, og la $f(x_1, \ldots, x_n|\theta)$ være simultantettheten eller punktsannsynligheten til $X_1, \ldots, X_n$, som avhenger av θ.
- Da er sannsynlighetstettheten eller punktsannsynligheten til aposteriorifordelingen til θ gitt ved

$$\pi(\theta|x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \frac{\pi(\theta)f(x_1,\ldots,x_n|\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} \pi(\theta)f(x_1,\ldots,x_n|\theta)d\theta}, & \theta \text{ er kontinuerlig} \\ \frac{\pi(\theta)f(x_1,\ldots,x_n|\theta)}{\sum_\theta \pi(\theta)f(x_1,\ldots,x_n|\theta)}, & \theta \text{ er diskret} \end{cases}.$$

- Legg merke til at nevner i uttrykkene over er konstanter, som skal sørge for at aposteriorifordelingen er en gyldig fordeling, og at i praksis er

Aposteriorifordelingen

- Anta at $x_1, \ldots, x_n$ er observasjoner av de stokastiske variablene $X_1, \ldots, X_n$, og la $f(x_1, \ldots, x_n|\theta)$ være simultantettheten eller punktsannsynligheten til $X_1, \ldots, X_n$, som avhenger av θ.
- Da er sannsynlighetstettheten eller punktsannsynligheten til aposteriorifordelingen til θ gitt ved

$$\pi(\theta|x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \frac{\pi(\theta)f(x_1,\ldots,x_n|\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} \pi(\theta)f(x_1,\ldots,x_n|\theta)d\theta}, & \theta \text{ er kontinuerlig} \\ \frac{\pi(\theta)f(x_1,\ldots,x_n|\theta)}{\sum_\theta \pi(\theta)f(x_1,\ldots,x_n|\theta)}, & \theta \text{ er diskret} \end{cases}.$$

- Legg merke til at nevner i uttrykkene over er konstanter, som skal sørge for at aposteriorifordelingen er en gyldig fordeling, og at i praksis er

$$\pi(\theta|x_1, \ldots, x_n) = c \cdot \pi(\theta)f(x_1, \ldots, x_n|\theta),$$

Aposteriorifordelingen

- Anta at $x_1, \ldots, x_n$ er observasjoner av de stokastiske variablene $X_1, \ldots, X_n$, og la $f(x_1, \ldots, x_n|\theta)$ være simultantettheten eller punktsannsynligheten til $X_1, \ldots, X_n$, som avhenger av θ.
- Da er sannsynlighetstettheten eller punktsannsynligheten til aposteriorifordelingen til θ gitt ved

$$\pi(\theta|x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} \frac{\pi(\theta)f(x_1,\ldots,x_n|\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} \pi(\theta)f(x_1,\ldots,x_n|\theta)d\theta}, & \theta \text{ er kontinuerlig} \\ \frac{\pi(\theta)f(x_1,\ldots,x_n|\theta)}{\sum_\theta \pi(\theta)f(x_1,\ldots,x_n|\theta)}, & \theta \text{ er diskret} \end{cases}.$$

- Legg merke til at nevner i uttrykkene over er konstanter, som skal sørge for at aposteriorifordelingen er en gyldig fordeling, og at i praksis er

$$\pi(\theta|x_1, \ldots, x_n) = c \cdot \pi(\theta)f(x_1, \ldots, x_n|\theta),$$

for en konstant c.

Eksempel 15.2

Eksempel 15.2

- Utslipp av subatomære partikler fra en strålingskilde er ofte modellert som en Poisson-prosess.

Eksempel 15.2

- Utslipp av subatomære partikler fra en strålingskilde er ofte modellert som en Poisson-prosess.
- Dette innebærer at tiden mellom suksessive utslipp følger en eksponensiell fordeling.

Eksempel 15.2

- Utslipp av subatomære partikler fra en strålingskilde er ofte modellert som en Poisson-prosess.
- Dette innebærer at tiden mellom suksessive utslipp følger en eksponensiell fordeling.
- Parameter λ for denne fordelingen typisk ukjent.

Eksempel 15.2

- Utslipp av subatomære partikler fra en strålingskilde er ofte modellert som en Poisson-prosess.
- Dette innebærer at tiden mellom suksessive utslipp følger en eksponensiell fordeling.
- Parameter λ for denne fordelingen typisk ukjent.
- Anta forskere på forhånd mener at gjennomsnittstiden mellom utslipp er omtrent et halvt sekund

Eksempel 15.2

- Utslipp av subatomære partikler fra en strålingskilde er ofte modellert som en Poisson-prosess.
- Dette innebærer at tiden mellom suksessive utslipp følger en eksponensiell fordeling.
- Parameter λ for denne fordelingen typisk ukjent.
- Anta forskere på forhånd mener at gjennomsnittstiden mellom utslipp er omtrent et halvt sekund
- Mulig prior: Gamma$(1, 2)$

Eksempel 15.2

- Utslipp av subatomære partikler fra en strålingskilde er ofte modellert som en Poisson-prosess.
- Dette innebærer at tiden mellom suksessive utslipp følger en eksponensiell fordeling.
- Parameter λ for denne fordelingen typisk ukjent.
- Anta forskere på forhånd mener at gjennomsnittstiden mellom utslipp er omtrent et halvt sekund
- Mulig prior: $\text{Gamma}(1, 2)$
- Data: $x_i \overset{uif}{\sim} \text{Exp}(\lambda), i = 1, ..., 5$

Eksempel 15.2

- Utslipp av subatomære partikler fra en strålingskilde er ofte modellert som en Poisson-prosess.
- Dette innebærer at tiden mellom suksessive utslipp følger en eksponensiell fordeling.
- Parameter λ for denne fordelingen typisk ukjent.
- Anta forskere på forhånd mener at gjennomsnittstiden mellom utslipp er omtrent et halvt sekund
- Mulig prior: $\text{Gamma}(1, 2)$
- Data: $x_i \overset{uif}{\sim} \text{Exp}(\lambda), i = 1, ..., 5$
- $\boldsymbol{x} = (0.66, 0.48, 0.44, 0.71, 0.56)$

Eksempel 15.2

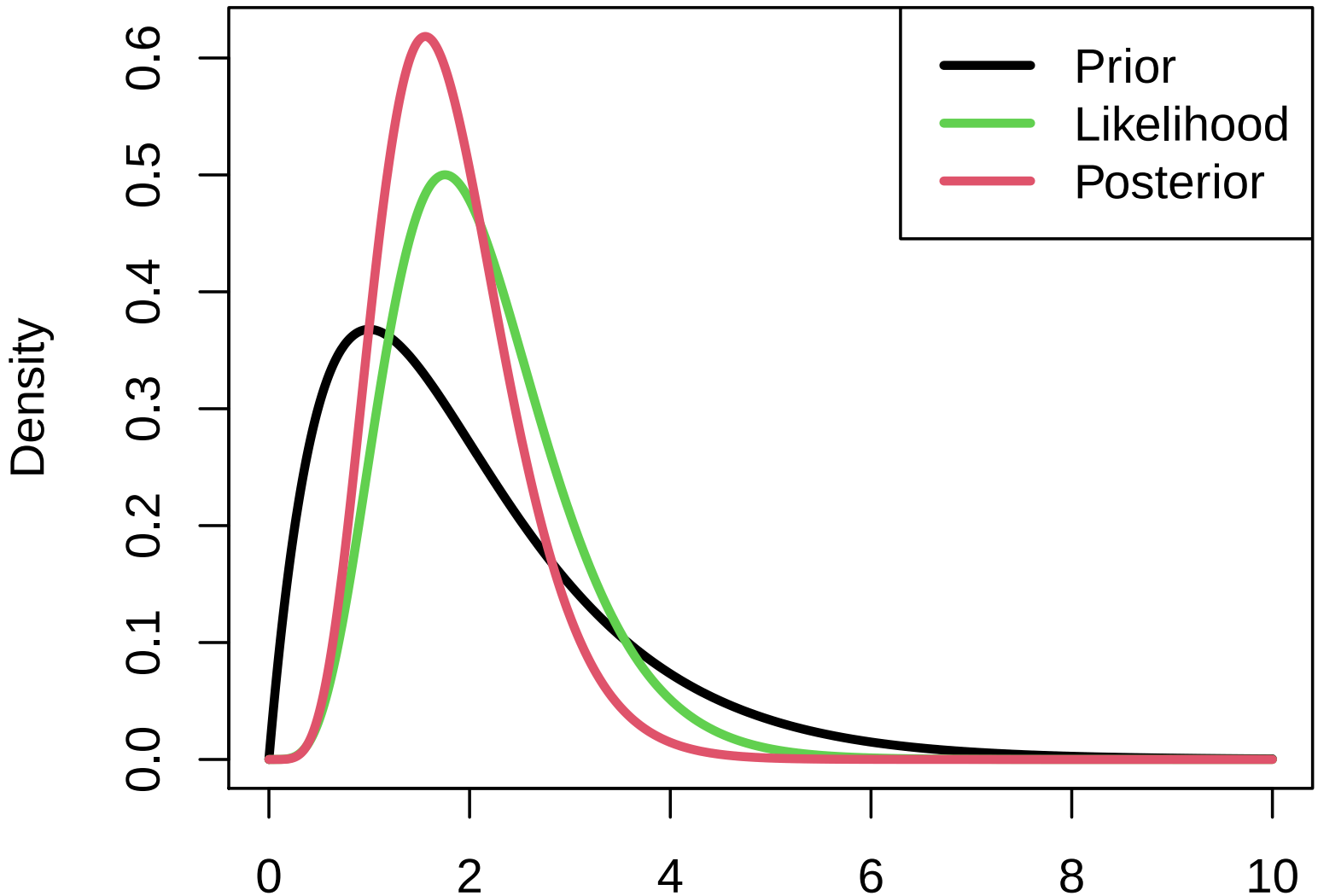
- Utslipp av subatomære partikler fra en strålingskilde er ofte modellert som en Poisson-prosess.
- Dette innebærer at tiden mellom suksessive utslipp følger en eksponensiell fordeling.
- Parameter λ for denne fordelingen typisk ukjent.
- Anta forskere på forhånd mener at gjennomsnittstiden mellom utslipp er omtrent et halvt sekund
- Mulig prior: $\text{Gamma}(1, 2)$
- Data: $x_i \overset{uif}{\sim} \text{Exp}(\lambda), i = 1, ..., 5$
- $\boldsymbol{x} = (0.66, 0.48, 0.44, 0.71, 0.56)$
- $\sum_{i=1}^{5} x_i = 2.85.$

Eksempel 15.2

- Utslipp av subatomære partikler fra en strålingskilde er ofte modellert som en Poisson-prosess.
- Dette innebærer at tiden mellom suksessive utslipp følger en eksponensiell fordeling.
- Parameter λ for denne fordelingen typisk ukjent.
- Anta forskere på forhånd mener at gjennomsnittstiden mellom utslipp er omtrent et halvt sekund
- Mulig prior: $\text{Gamma}(1, 2)$
- Data: $x_i \overset{uif}{\sim} \text{Exp}(\lambda), i = 1, ..., 5$
- $\boldsymbol{x} = (0.66, 0.48, 0.44, 0.71, 0.56)$
- $\sum_{i=1}^{5} x_i = 2.85.$
- Utledning: $\pi(\lambda|\boldsymbol{x}) \sim \text{Gamma}(7, 1/3.85)$

Eksempel 15.2 - forts

Eksempel 15.2 - forts



Eksempel 15.3

Eksempel 15.3

- En 2010 NationalScience Foundation-studie fant at 488 av 939 undersøkte voksne feilaktig tror at antibiotika dreper virus

Eksempel 15.3

- En 2010 NationalScience Foundation-studie fant at 488 av 939 undersøkte voksne feilaktig tror at antibiotika dreper virus (de dreper bare bakterier).

Eksempel 15.3

- En 2010 NationalScience Foundation-studie fant at 488 av 939 undersøkte voksne feilaktig tror at antibiotika dreper virus (de dreper bare bakterier).
- La θ betegne andelen av alle amerikanske voksne som har denne feilaktige oppfatningen.

Eksempel 15.3

- En 2010 NationalScience Foundation-studie fant at 488 av 939 undersøkte voksne feilaktig tror at antibiotika dreper virus (de dreper bare bakterier).
- La θ betegne andelen av alle amerikanske voksne som har denne feilaktige oppfatningen.
- Anta en NSF-forsker tror $\theta \approx 1/3$, men usikker

Eksempel 15.3

- En 2010 NationalScience Foundation-studie fant at 488 av 939 undersøkte voksne feilaktig tror at antibiotika dreper virus (de dreper bare bakterier).
- La θ betegne andelen av alle amerikanske voksne som har denne feilaktige oppfatningen.
- Anta en NSF-forsker tror $\theta \approx 1/3$, men usikker
- Mulig prior $\theta \sim \text{Beta}(2, 4)$

Eksempel 15.3

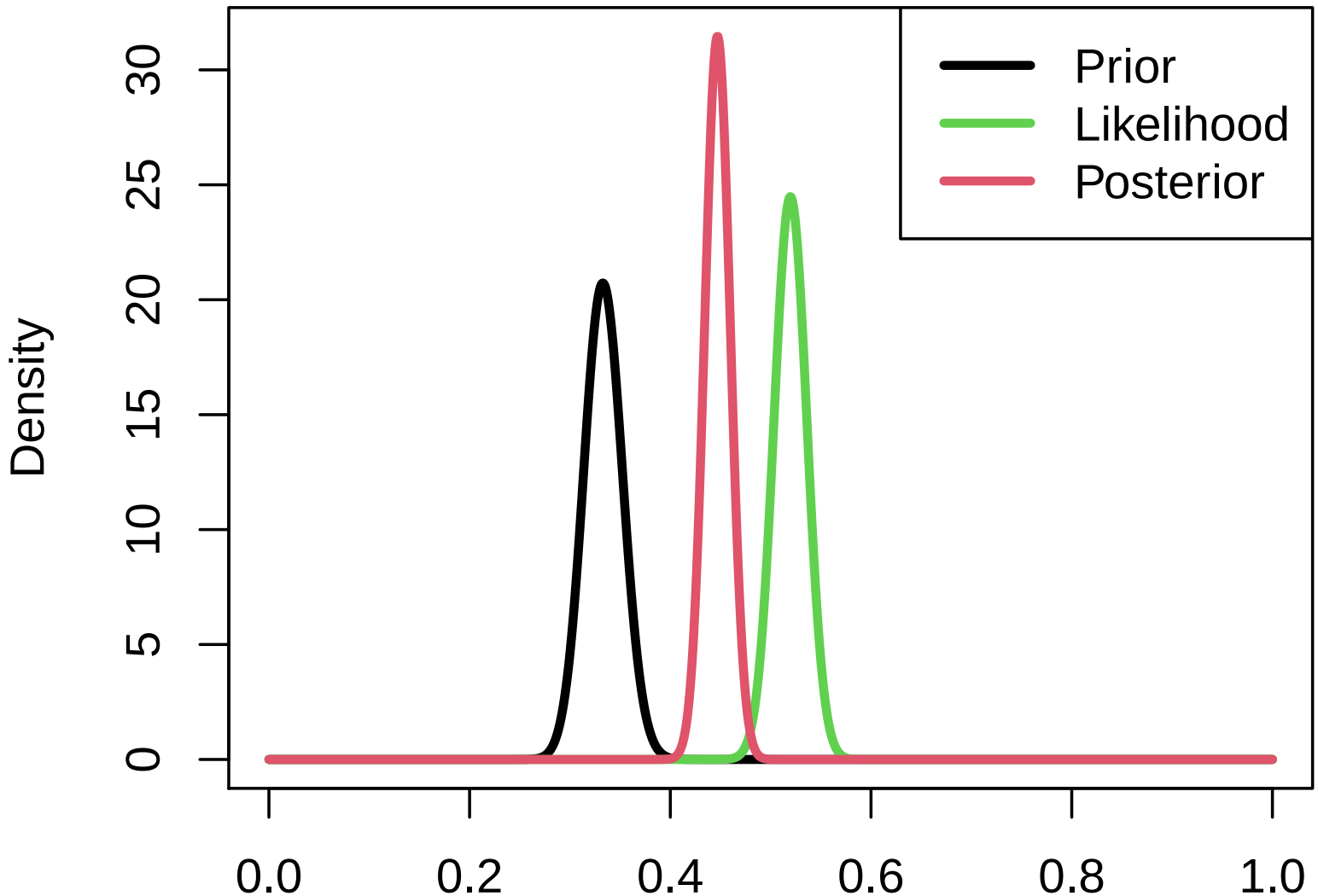
- En 2010 NationalScience Foundation-studie fant at 488 av 939 undersøkte voksne feilaktig tror at antibiotika dreper virus (de dreper bare bakterier).
- La θ betegne andelen av alle amerikanske voksne som har denne feilaktige oppfatningen.
- Anta en NSF-forsker tror $\theta \approx 1/3$, men usikker
- Mulig prior $\theta \sim \text{Beta}(2, 4)$
- Data: $X \sim \text{Bin}(939, \theta)$, $x = 488$

Eksempel 15.3

- En 2010 NationalScience Foundation-studie fant at 488 av 939 undersøkte voksne feilaktig tror at antibiotika dreper virus (de dreper bare bakterier).
- La θ betegne andelen av alle amerikanske voksne som har denne feilaktige oppfatningen.
- Anta en NSF-forsker tror $\theta \approx 1/3$, men usikker
- Mulig prior $\theta \sim \text{Beta}(2, 4)$
- Data: $X \sim \text{Bin}(939, \theta)$, $x = 488$
- Utledning: $\pi(\theta|x) \sim \text{Beta}(490, 455)$

Eksempel 15.3 - forts

Eksempel 15.3 - forts



Utledning posteriorifordeling, Eks. 15.3

Den generelle tettheten i en Beta(α, β) gis ved, for $0 < \theta < 1$,

Utledning posteriorifordeling, Eks. 15.3

Den generelle tettheten i en Beta(α, β) gis ved, for $0 < \theta < 1$,

$$\pi(\theta) = \pi(\theta; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \theta^{\alpha - 1} (1 - \theta)^{\beta - 1}$$

Utledning posterioriforddeling, Eks. 15.3

Den generelle tettheten i en Beta(α, β) gis ved, for $0 < \theta < 1$,

$$\pi(\theta) = \pi(\theta; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \theta^{\alpha - 1}(1 - \theta)^{\beta - 1}$$

der vi velger aprioriforddeling med $\alpha = 2$ og $\beta = 4$ for θ.

Utledning posterioriforddeling, Eks. 15.3

Den generelle tettheten i en Beta(α, β) gis ved, for $0 < \theta < 1$,

$$\pi(\theta) = \pi(\theta; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \theta^{\alpha - 1}(1 - \theta)^{\beta - 1}$$

der vi velger aprioriforddeling med $\alpha = 2$ og $\beta = 4$ for θ.

Gitt θ er $Y \sim \text{Bin}(n, \theta)$, så $\text{P}(Y = y|\theta) = \binom{n}{y} \theta^y (1 - \theta)^{n-y}$.

Utledning posteriorifordeling, Eks. 15.3

Den generelle tettheten i en Beta(α, β) gis ved, for $0 < \theta < 1$,

$$\pi(\theta) = \pi(\theta; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \theta^{\alpha - 1}(1 - \theta)^{\beta - 1}$$

der vi velger aprioriforfordeling med $\alpha = 2$ og $\beta = 4$ for θ.

Gitt θ er $Y \sim \text{Bin}(n, \theta)$, så $\text{P}(Y = y|\theta) = \binom{n}{y} \theta^y (1 - \theta)^{n-y}$.

Dermed får vi via Bayes' setning at aposteriori-fordelingen for $\theta | Y = y$ gis fra

Utledning posteriorifordeling, Eks. 15.3

Den generelle tettheten i en Beta(α, β) gis ved, for $0 < \theta < 1$,

$$\pi(\theta) = \pi(\theta; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}$$

der vi velger aprioriforde ling med $\alpha = 2$ og $\beta = 4$ for θ.

Gitt θ er $Y \sim \text{Bin}(n, \theta)$, så $\text{P}(Y = y|\theta) = \binom{n}{y}\theta^y(1-\theta)^{n-y}$.

Dermed får vi via Bayes' setning at aposteriori-fordelingen for $\theta|Y = y$ gis fra

$$\pi(\theta|y) \quad = \frac{\pi(\theta)\text{P}(Y=y|\theta)}{\text{P}(Y=y)} = \frac{\pi(\theta)\text{P}(Y=y|\theta)}{\int_0^1 \text{P}(Y=y|\theta))\pi(\theta)d\theta}$$

Utledning posteriorifordeling, Eks. 15.3

Den generelle tettheten i en Beta(α, β) gis ved, for $0 < \theta < 1$,

$$\pi(\theta) = \pi(\theta; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}$$

der vi velger aprioriforde ling med $\alpha = 2$ og $\beta = 4$ for θ.

Gitt θ er $Y \sim \text{Bin}(n, \theta)$, så $\text{P}(Y = y|\theta) = \binom{n}{y}\theta^y(1-\theta)^{n-y}$.

Dermed får vi via Bayes' setning at aposteriori-fordelingen for $\theta|Y = y$ gis fra

$$\begin{aligned}\pi(\theta|y) &= \frac{\pi(\theta)\text{P}(Y=y|\theta)}{\text{P}(Y=y)} = \frac{\pi(\theta)\text{P}(Y=y|\theta)}{\int_0^1 \text{P}(Y=y|\theta))\pi(\theta)d\theta} \\ &= c\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}\binom{n}{y}\theta^y(1-\theta)^{n-y}\end{aligned}$$

Utledning posteriorifordeling, Eks. 15.3

Den generelle tettheten i en Beta(α, β) gis ved, for $0 < \theta < 1$,

$$\pi(\theta) = \pi(\theta; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}$$

der vi velger aprioriforde ling med $\alpha = 2$ og $\beta = 4$ for θ.

Gitt θ er $Y \sim \text{Bin}(n, \theta)$, så $\text{P}(Y = y|\theta) = \binom{n}{y}\theta^y(1-\theta)^{n-y}$.

Dermed får vi via Bayes' setning at aposteriori-fordelingen for $\theta|Y = y$ gis fra

$$\begin{aligned}
\pi(\theta|y) &= \frac{\pi(\theta)\text{P}(Y=y|\theta)}{\text{P}(Y=y)} = \frac{\pi(\theta)\text{P}(Y=y|\theta)}{\int_0^1 \text{P}(Y=y|\theta))\pi(\theta)d\theta} \\
&= c\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}\binom{n}{y}\theta^y(1-\theta)^{n-y} \\
&= c' \ \theta^{y+\alpha-1}(1-\theta)^{n-y+\beta-1},
\end{aligned}$$

Utledning posterioriforfordeling, Eks. 15.3

Den generelle tettheten i en Beta(α, β) gis ved, for $0 < \theta < 1$,

$$\pi(\theta) = \pi(\theta; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}$$

der vi velger aprioriforfordeling med $\alpha = 2$ og $\beta = 4$ for θ.

Gitt θ er $Y \sim \text{Bin}(n, \theta)$, så $\text{P}(Y = y|\theta) = \binom{n}{y}\theta^y(1-\theta)^{n-y}$.

Dermed får vi via Bayes' setning at aposteriori-fordelingen for $\theta|Y = y$ gis fra

$$\begin{aligned}
\pi(\theta|y) &= \frac{\pi(\theta)\text{P}(Y=y|\theta)}{\text{P}(Y=y)} = \frac{\pi(\theta)\text{P}(Y=y|\theta)}{\int_0^1 \text{P}(Y=y|\theta))\pi(\theta)d\theta} \\
&= c\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}\binom{n}{y}\theta^y(1-\theta)^{n-y} \\
&= c' \ \theta^{y+\alpha-1}(1-\theta)^{n-y+\beta-1},
\end{aligned}$$

men siden $\pi(\theta|y)$ er en fordeling over mulige θ

Utledning posterioriforddeling, Eks. 15.3

Den generelle tettheten i en Beta(α, β) gis ved, for $0 < \theta < 1$,

$$\pi(\theta) = \pi(\theta; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}$$

der vi velger aprioriforddeling med $\alpha = 2$ og $\beta = 4$ for θ.

Gitt θ er $Y \sim \text{Bin}(n, \theta)$, så $\text{P}(Y = y|\theta) = \binom{n}{y}\theta^y(1-\theta)^{n-y}$.

Dermed får vi via Bayes' setning at aposteriori-fordelingen for $\theta|Y = y$ gis fra

$$\begin{aligned}
\pi(\theta|y) &= \frac{\pi(\theta)\text{P}(Y=y|\theta)}{\text{P}(Y=y)} = \frac{\pi(\theta)\text{P}(Y=y|\theta)}{\int_0^1 \text{P}(Y=y|\theta))\pi(\theta)d\theta} \\
&= c\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}\binom{n}{y}\theta^y(1-\theta)^{n-y} \\
&= c' \ \theta^{y+\alpha-1}(1-\theta)^{n-y+\beta-1},
\end{aligned}$$

men siden $\pi(\theta|y)$ er en fordeling over mulige θ må dette være Beta-fordelingen

Utledning posterioriforddeling, Eks. 15.3

Den generelle tettheten i en Beta(α, β) gis ved, for $0 < \theta < 1$,

$$\pi(\theta) = \pi(\theta; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}$$

der vi velger aprioriforddeling med $\alpha = 2$ og $\beta = 4$ for θ.

Gitt θ er $Y \sim \text{Bin}(n, \theta)$, så $\text{P}(Y = y|\theta) = \binom{n}{y}\theta^y(1-\theta)^{n-y}$.

Dermed får vi via Bayes' setning at aposteriori-fordelingen for $\theta|Y = y$ gis fra

$$\begin{aligned}
\pi(\theta|y) &= \frac{\pi(\theta)\text{P}(Y=y|\theta)}{\text{P}(Y=y)} = \frac{\pi(\theta)\text{P}(Y=y|\theta)}{\int_0^1 \text{P}(Y=y|\theta))\pi(\theta)d\theta} \\
&= c\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}\binom{n}{y}\theta^y(1-\theta)^{n-y} \\
&= c' \ \theta^{y+\alpha-1}(1-\theta)^{n-y+\beta-1},
\end{aligned}$$

men siden $\pi(\theta|y)$ er en fordeling over mulige θ må dette være Beta-fordelingen med parametre $(\alpha + y, \beta + n - y) =$

Utledning posterioriforddeling, Eks. 15.3

Den generelle tettheten i en Beta(α, β) gis ved, for $0 < \theta < 1$,

$$\pi(\theta) = \pi(\theta; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}$$

der vi velger aprioriforddeling med $\alpha = 2$ og $\beta = 4$ for θ.

Gitt θ er $Y \sim \text{Bin}(n, \theta)$, så $\text{P}(Y = y|\theta) = \binom{n}{y}\theta^y(1-\theta)^{n-y}$.

Dermed får vi via Bayes' setning at aposteriori-fordelingen for $\theta|Y = y$ gis fra

$$\begin{aligned}
\pi(\theta|y) &= \frac{\pi(\theta)\text{P}(Y=y|\theta)}{\text{P}(Y=y)} = \frac{\pi(\theta)\text{P}(Y=y|\theta)}{\int_0^1 \text{P}(Y=y|\theta))\pi(\theta)d\theta} \\
&= c\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}\binom{n}{y}\theta^y(1-\theta)^{n-y} \\
&= c' \ \theta^{y+\alpha-1}(1-\theta)^{n-y+\beta-1},
\end{aligned}$$

men siden $\pi(\theta|y)$ er en fordeling over mulige θ må dette være Beta-fordelingen med parametre $(\alpha + y, \beta + n - y) = (y + 2, n - y + 4) = (490, 455)$

Utledning posterioriforddeling, Eks. 15.3

Den generelle tettheten i en Beta(α, β) gis ved, for $0 < \theta < 1$,

$$\pi(\theta) = \pi(\theta; \alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}$$

der vi velger aprioriforddeling med $\alpha = 2$ og $\beta = 4$ for θ.

Gitt θ er $Y \sim \text{Bin}(n, \theta)$, så $\text{P}(Y = y|\theta) = \binom{n}{y}\theta^y(1-\theta)^{n-y}$.

Dermed får vi via Bayes' setning at aposteriori-fordelingen for $\theta|Y = y$ gis fra

$$\begin{aligned}
\pi(\theta|y) &= \frac{\pi(\theta)\text{P}(Y=y|\theta)}{\text{P}(Y=y)} = \frac{\pi(\theta)\text{P}(Y=y|\theta)}{\int_0^1 \text{P}(Y=y|\theta))\pi(\theta)d\theta} \\
&= c\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}\binom{n}{y}\theta^y(1-\theta)^{n-y} \\
&= c' \ \theta^{y+\alpha-1}(1-\theta)^{n-y+\beta-1},
\end{aligned}$$

men siden $\pi(\theta|y)$ er en fordeling over mulige θ må dette være Beta-fordelingen med parametre $(\alpha + y, \beta + n - y) = (y + 2, n - y + 4) = (490, 455)$ når $n = 939$ og $y = 488$.

Konjugert aprioriforde ling

Konjugert aprioriforde ling

- En aprioriforde lingen som, kombinert med forde lingen til dataene,

Konjugert aprioriforfordeling

- En aprioriforfordelingen som, kombinert med fordelingen til dataene, gir en aposteriorifordeling i samme fordelingsfamilie,

Konjugert aprioriforde ling

- En aprioriforde lingen som, kombinert med forde lingen til dataene, gir en aposteriorifordeling i samme forde lingsfamilie, bare med andre parametere,

Konjugert aprioriforfordeling

- En aprioriforfordelingen som, kombinert med fordelingen til dataene, gir en aposteriorifordeling i samme fordelingsfamilie, bare med andre parametere, kalles konjugert

Konjugert aprioriforfordeling

- En aprioriforfordelingen som, kombinert med fordelingen til dataene, gir en aposteriorifordeling i samme fordelingsfamilie, bare med andre parametere, kalles konjugert ("conjugate")

Konjugert aprioriforderling

- En aprioriforderlingen som, kombinert med forderlingen til dataene, gir en aposteriorifordeling i samme fordelingsfamilie, bare med andre parametere, kalles konjugert ("conjugate") med fordelingen til dataene.

Konjugert aprioriforderling

- En aprioriforderlingen som, kombinert med forderlingen til dataene, gir en aposteriorifordeling i samme fordelingsfamilie, bare med andre parametere, kalles konjugert ("conjugate") med fordelingen til dataene.

Konjugert aprioriforde ling

- En aprioriforde lingen som, kombinert med forde lingen til dataene, gir en aposteriorifordeling i samme fordelingsfamilie, bare med andre parametere, kalles konjugert ("conjugate") med forde lingen til dataene.
- Eksempler på konjugerte aprioriforde linger:

Konjugert aprioriforfordeling

- En aprioriforfordelingen som, kombinert med fordelingen til dataene, gir en aposteriorifordeling i samme fordelingsfamilie, bare med andre parametere, kalles konjugert ("conjugate") med fordelingen til dataene.
- Eksempler på konjugerte aprioriforfordelinger:
  1. $\left.\begin{array}{c} X_1, \ldots, X_n | \theta \overset{uif}{\sim} Bernoulli(\theta) \\ Y|\theta \sim Bin(n, \theta) \end{array}\right\}: \theta \sim Beta(\alpha, \beta)$

Konjugert aprioriforfordeling

- En aprioriforfordelingen som, kombinert med fordelingen til dataene, gir en aposteriorifordeling i samme fordelingsfamilie, bare med andre parametere, kalles konjugert ("conjugate") med fordelingen til dataene.
- Eksempler på konjugerte aprioriforfordelinger:
  1. $$\left.\begin{array}{c} X_1,\ldots,X_n|\theta \overset{uif}{\sim} Bernoulli(\theta) \\ Y|\theta \sim Bin(n,\theta) \end{array}\right\}: \theta \sim Beta(\alpha,\beta)$$

$$\longrightarrow \left.\begin{array}{c} \theta|X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n \\ \theta|Y=y \end{array}\right\} \sim Beta(\alpha+y,\beta+n-y), \quad y=\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Konjugert aprioriforfordeling

- En aprioriforfordelingen som, kombinert med fordelingen til dataene, gir en aposteriorifordeling i samme fordelingsfamilie, bare med andre parametere, kalles konjugert ("conjugate") med fordelingen til dataene.
- Eksempler på konjugerte aprioriforfordelinger:
  1. $$\left.\begin{array}{c} X_1,\ldots,X_n|\theta \overset{uif}{\sim} Bernoulli(\theta) \\ Y|\theta \sim Bin(n,\theta) \end{array}\right\}: \theta \sim Beta(\alpha,\beta)$$

     $$\longrightarrow \left.\begin{array}{c} \theta|X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n \\ \theta|Y=y \end{array}\right\} \sim Beta(\alpha+y,\beta+n-y), \quad y=\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

  2. $X_1,\ldots,X_n|\theta \overset{uif}{\sim} Eksponential(\theta)$: $\theta \sim Gamma(\alpha,\beta)$

Konjugert aprioriforfordeling

- En aprioriforfordelingen som, kombinert med fordelingen til dataene, gir en aposteriorifordeling i samme fordelingsfamilie, bare med andre parametere, kalles konjugert ("conjugate") med fordelingen til dataene.
- Eksempler på konjugerte aprioriforfordelinger:
  1. $$\left.\begin{array}{c} X_1,\ldots,X_n|\theta \overset{uif}{\sim} Bernoulli(\theta) \\ Y|\theta \sim Bin(n,\theta) \end{array}\right\}: \theta \sim Beta(\alpha,\beta)$$

     $$\longrightarrow \left.\begin{array}{c} \theta|X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n \\ \theta|Y=y \end{array}\right\} \sim Beta(\alpha+y,\beta+n-y), \quad y=\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

  2. $X_1,\ldots,X_n|\theta \overset{uif}{\sim} Eksponential(\theta)$: $\theta \sim Gamma(\alpha,\beta)$

     $$\longrightarrow \theta|X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n \sim Gamma\left(\alpha+n, \frac{1}{1/\beta+\sum_{i=1}^{n} x_i}\right)$$

Konjugert aprioriforfordeling

- En aprioriforfordelingen som, kombinert med fordelingen til dataene, gir en aposteriorifordeling i samme fordelingsfamilie, bare med andre parametere, kalles konjugert ("conjugate") med fordelingen til dataene.
- Eksempler på konjugerte aprioriforfordelinger:

1. $\left.\begin{array}{c} X_1,\ldots,X_n|\theta \overset{uif}{\sim} Bernoulli(\theta) \\ Y|\theta \sim Bin(n,\theta) \end{array}\right\}: \theta \sim Beta(\alpha,\beta)$

$$\longrightarrow \left.\begin{array}{c} \theta|X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n \\ \theta|Y=y \end{array}\right\} \sim Beta(\alpha+y,\beta+n-y), \quad y=\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

2. $X_1,\ldots,X_n|\theta \overset{uif}{\sim} Eksponential(\theta)$: $\theta \sim Gamma(\alpha,\beta)$

$$\longrightarrow \theta|X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n \sim Gamma\left(\alpha+n, \frac{1}{1/\beta+\sum_{i=1}^{n} x_i}\right)$$

3. $X_1,\ldots,X_n|\theta \overset{uif}{\sim} N(\theta,\sigma^2)$ med σ kjent: $\theta \sim N(\mu,\tau^2)$

Konjugert aprioriforfordeling

- En aprioriforfordelingen som, kombinert med fordelingen til dataene, gir en aposteriorifordeling i samme fordelingsfamilie, bare med andre parametere, kalles konjugert ("conjugate") med fordelingen til dataene.
- Eksempler på konjugerte aprioriforfordelinger:

1. $\left.\begin{array}{c} X_1,\ldots,X_n|\theta \overset{uif}{\sim} Bernoulli(\theta) \\ Y|\theta \sim Bin(n,\theta) \end{array}\right\}: \theta \sim Beta(\alpha,\beta)$

$$\longrightarrow \left.\begin{array}{c} \theta|X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n \\ \theta|Y=y \end{array}\right\} \sim Beta(\alpha+y,\beta+n-y), \quad y=\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

2. $X_1,\ldots,X_n|\theta \overset{uif}{\sim} Eksponential(\theta)$: $\theta \sim Gamma(\alpha,\beta)$

$$\longrightarrow \theta|X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n \sim Gamma\left(\alpha+n, \frac{1}{1/\beta+\sum_{i=1}^{n} x_i}\right)$$

3. $X_1,\ldots,X_n|\theta \overset{uif}{\sim} N(\theta,\sigma^2)$ med σ kjent: $\theta \sim N(\mu,\tau^2)$

$$\longrightarrow \theta|X_1=x_1,\ldots,X_n=x_n \sim N\left(\frac{\mu/\tau^2+n\bar{x}/\sigma^2}{1/\tau^2+n/\sigma^2}, \frac{1}{1/\tau^2+n/\sigma^2}\right)$$

Bayesiansk punktestimering

Bayesiansk punktestimering

- Det strider mot den Bayesianske filosofien å oppgi ett enkelt punktestimat for en ukjent parameter θ.

Bayesiansk punktestimering

- Det strider mot den Bayesianske filosofien å oppgi ett enkelt punktestimat for en ukjent parameter θ.
- Trenger en likevel å oppsummere θ med ett enkelt tall, finnes det flere alternativer.

Bayesiansk punktestimering

- Det strider mot den Bayesianske filosofien å oppgi ett enkelt punktestimat for en ukjent parameter θ.
- Trenger en likevel å oppsummere θ med ett enkelt tall, finnes det flere alternativer.
- Ett alternativ er maksimum aposterioriestimatoren (MAP),

Bayesiansk punktestimering

- Det strider mot den Bayesianske filosofien å oppgi ett enkelt punktestimat for en ukjent parameter θ.
- Trenger en likevel å oppsummere θ med ett enkelt tall, finnes det flere alternativer.
- Ett alternativ er maksimum aposterioriestimatoren (MAP), som er moden i aposteriorifordelingen.

Bayesiansk punktestimering

- Det strider mot den Bayesianske filosofien å oppgi ett enkelt punktestimat for en ukjent parameter θ.
- Trenger en likevel å oppsummere θ med ett enkelt tall, finnes det flere alternativer.
- Ett alternativ er maksimum aposterioriestimatoren (MAP), som er moden i aposteriorifordelingen.
- Et annet vanlig alternativ er Bayes-estimatoren

Bayesiansk punktestimering

- Det strider mot den Bayesianske filosofien å oppgi ett enkelt punktestimat for en ukjent parameter θ.
- Trenger en likevel å oppsummere θ med ett enkelt tall, finnes det flere alternativer.
- Ett alternativ er maksimum aposterioriestimatoren (MAP), som er moden i aposteriorifordelingen.
- Et annet vanlig alternativ er Bayes-estimatoren

$$\hat{\theta} = \mathrm{E}(\theta | X_1, \ldots, X_n)$$

Bayesiansk punktestimering

- Det strider mot den Bayesianske filosofien å oppgi ett enkelt punktestimat for en ukjent parameter θ.
- Trenger en likevel å oppsummere θ med ett enkelt tall, finnes det flere alternativer.
- Ett alternativ er maksimum aposterioriestimatoren (MAP), som er moden i aposteriorifordelingen.
- Et annet vanlig alternativ er Bayes-estimatoren

$$\hat{\theta} = \mathrm{E}(\theta | X_1, \ldots, X_n)$$

med tilsvarende estimat

$$\hat{\theta} = \mathrm{E}(\theta | x_1, \ldots, x_n).$$

Bayesiansk punktestimering

Bayesiansk punktestimering

- Det kan vises at under veldig generelle betingelser har aposteriorifordelingen følgende egenskaper når $n \to \infty$:

Bayesiansk punktestimering

- Det kan vises at under veldig generelle betingelser har aposteriorifordelingen følgende egenskaper når $n \to \infty$:
  1. forventningen konvergerer mot den sanne verdien til θ

Bayesiansk punktestimering

- Det kan vises at under veldig generelle betingelser har aposteriorifordelingen følgende egenskaper når $n \to \infty$:
  1. forventningen konvergerer mot den sanne verdien til θ
  2. variansen konvergerer mot 0.

Bayesiansk punktestimering

- Det kan vises at under veldig generelle betingelser har aposteriorifordelingen følgende egenskaper når $n \to \infty$:
  1. forventningen konvergerer mot den sanne verdien til θ
  2. variansen konvergerer mot 0.
- Disse egenskapene betyr at Bayes-estimatoren er konsistent.

Bayesiansk intervallestimering

Bayesiansk intervallestimering

- Bayesianske intervallestimater kalles kredibilitetsintervaller.

Bayesiansk intervallestimering

- Bayesianske intervallestimater kalles kredibilitestsintervaller.
- Et $(1-\alpha)\cdot 100\%$ kredibilitetsintervall for θ er gitt ved

$$(\eta_{\alpha/2}, \eta_{1-\alpha/2}),$$

Bayesiansk intervallestimering

- Bayesianske intervallestimater kalles kredibilitestsintervaller.
- Et $(1-\alpha)\cdot 100\%$ kredibilitetsintervall for θ er gitt ved

$$(\eta_{\alpha/2}, \eta_{1-\alpha/2}),$$

der η_p er $100p$-persentilen til aposteriorifordelingen.

Bayesiansk intervallestimering

- Bayesianske intervallestimater kalles kredibilitestsintervaller.
- Et $(1-\alpha)\cdot 100\%$ kredibilitetsintervall for θ er gitt ved

$$(\eta_{\alpha/2}, \eta_{1-\alpha/2}),$$

der η_p er $100p$-persentilen til aposteriorifordelingen.

- Tolkningen til et $(1-\alpha)\cdot 100\%$ kredibilitetsintervall for θ er at det inneholder θ med sannsynlighet $1-\alpha$,

Bayesiansk intervallestimering

- Bayesianske intervallestimater kalles kredibilitetsintervaller.
- Et $(1-\alpha)\cdot 100\%$ kredibilitetsintervall for θ er gitt ved

$$(\eta_{\alpha/2}, \eta_{1-\alpha/2}),$$

der η_p er $100p$-persentilen til aposteriorifordelingen.

- Tolkningen til et $(1-\alpha)\cdot 100\%$ kredibilitetsintervall for θ er at det inneholder θ med sannsynlighet $1-\alpha$, i motsetning til et konfidensintervall.

Bayesiansk intervallestimering

- Bayesianske intervallestimater kalles kredibilitetsintervaller.
- Et $(1-\alpha)\cdot 100\%$ kredibilitetsintervall for θ er gitt ved

$$(\eta_{\alpha/2}, \eta_{1-\alpha/2}),$$

der η_p er $100p$-persentilen til aposteriorifordelingen.

- Tolkningen til et $(1-\alpha)\cdot 100\%$ kredibilitetsintervall for θ er at det inneholder θ med sannsynlighet $1-\alpha$, i motsetning til et konfidensintervall.
- Når n er stor, får apriorifordelingen lite å si sammenlignet med fordelingen til dataene.

Bayesiansk intervallestimering

- Bayesianske intervallestimater kalles kredibilitetsintervaller.
- Et $(1-\alpha)\cdot 100\%$ kredibilitetsintervall for θ er gitt ved

$$(\eta_{\alpha/2}, \eta_{1-\alpha/2}),$$

  der η_p er $100p$-persentilen til aposteriorifordelingen.
- Tolkningen til et $(1-\alpha)\cdot 100\%$ kredibilitetsintervall for θ er at det inneholder θ med sannsynlighet $1-\alpha$, i motsetning til et konfidensintervall.
- Når n er stor, får apriorifordelingen lite å si sammenlignet med fordelingen til dataene.
- Da vil punktestimater og intervallestimater oppnådd med Bayesiansk og frekventistisk framgangsmåte være nokså like.