# STK1110 Høsten 2026

## Enveis variansanalyse

Tilsvarer Avsnitt 11.1 og 11.3 (s. 662-663)

# Enveis variansanalyse

- Kap 8-9: Ett utvalg
- Kap 10: To utvalg
- Kap 11: Flere ($> 2$) utvalg
  - Ønsker å test om det er forskjell mellom utvalgene

# Eksempel

- For å undersøke opptak av fett fra ulike meieriprodukter, ble 30 rotter fôret med ulike produkter.
- Rottene ble delt inn i fem like store grupper på seks.
- Hver gruppe ble fôret med ett av følgende meieriprodukter:
  1. kremost
  2. rømme
  3. fløte
  4. smørbart smør (smør innblandet 25% vegetabilsk olje)
  5. smør
- Hver rotte fikk en mengde av meieriproduktet tilsvarende 300 mg fett
- Totalt opptak av fett (i mg) i løpet av 8 timer ble målt (via mengden av fettsyrer i lymfeårene).
- Er opptaket av fett det samme for alle typer meieriprodukter?

# Enveis variansanalyse (ANOVA)

- Enveis variansanalyse: Sammenligning av forventningsverdien i flere populasjoner,
  - populasjonene er definert ut fra én bestemt faktor.
- Anta
  - $I$ grupper (behandlinger)
  - $J$ observasjoner i hver (for enkelhets skyld er det like mange observasjoner i hver gruppe).
- Anta
  - $X_{i1}, \ldots, X_{iJ} \overset{uavh}{\sim} N(\mu_i, \sigma^2)$, der $X_{ij}$ er $j$-te måling i gruppe $i$,
    - Felles $\sigma^2$ for alle grupper!
    - Men kan ha ulike forventninger $\mu_i$
  - $X_{ij}$-ene er uavhengige på tvers av grupper.
- Vi ønsker å teste

$$H_0 : \mu_1 = \ldots = \mu_I = \mu \quad \text{mot} \quad H_a : \text{minst to } \mu_i\text{-er er forskjellige.}$$

# Eksempel 11.1

- Flere forskjellige typer esker ble sammenlignet med hensyn til trykkstyrke

**Table 11.1** The data and summary quantities for Example 11.1

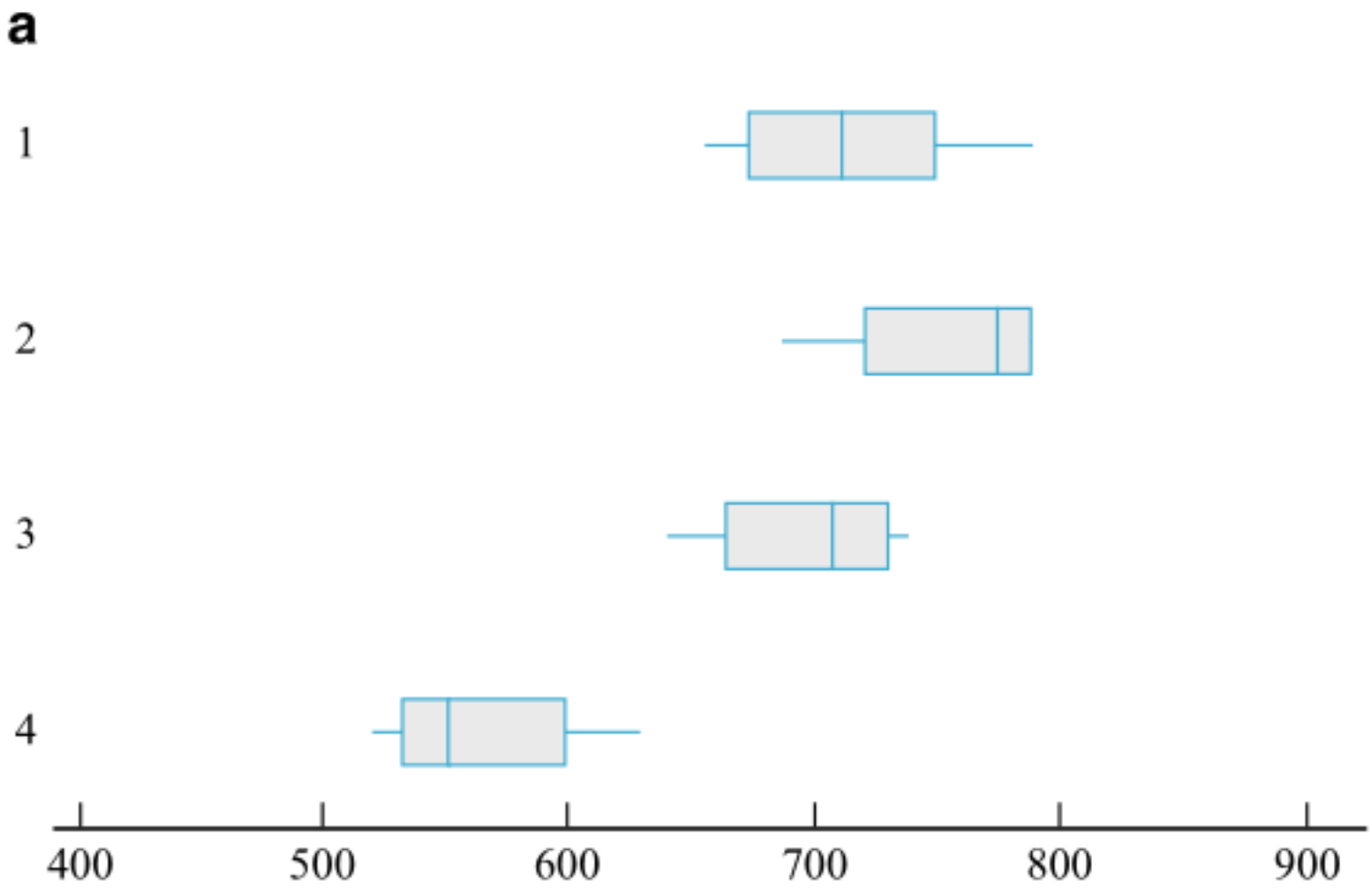
| Type of box | Compression strength (lb) | | | Sample mean | Sample SD |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 655.5 | 788.3 | 734.3 | 713.00 | 46.55 |
| | 721.4 | 679.1 | 699.4 | | |
| 2 | 789.2 | 772.5 | 786.9 | 756.93 | 40.34 |
| | 686.1 | 732.1 | 774.8 | | |
| 3 | 737.1 | 639.0 | 696.3 | 698.07 | 37.20 |
| | 671.7 | 717.2 | 727.1 | | |
| 4 | 535.1 | 628.7 | 542.4 | 562.02 | 39.87 |
| | 559.0 | 586.9 | 520.0 | | |
| | | | Grand mean = | 682.50 | |

Her er det altså $I = 4$ grupper med $J = 6$ observasjoner i hver gruppe.

Er forventet trykkstyrke ulikt i de forskjellige gruppene?

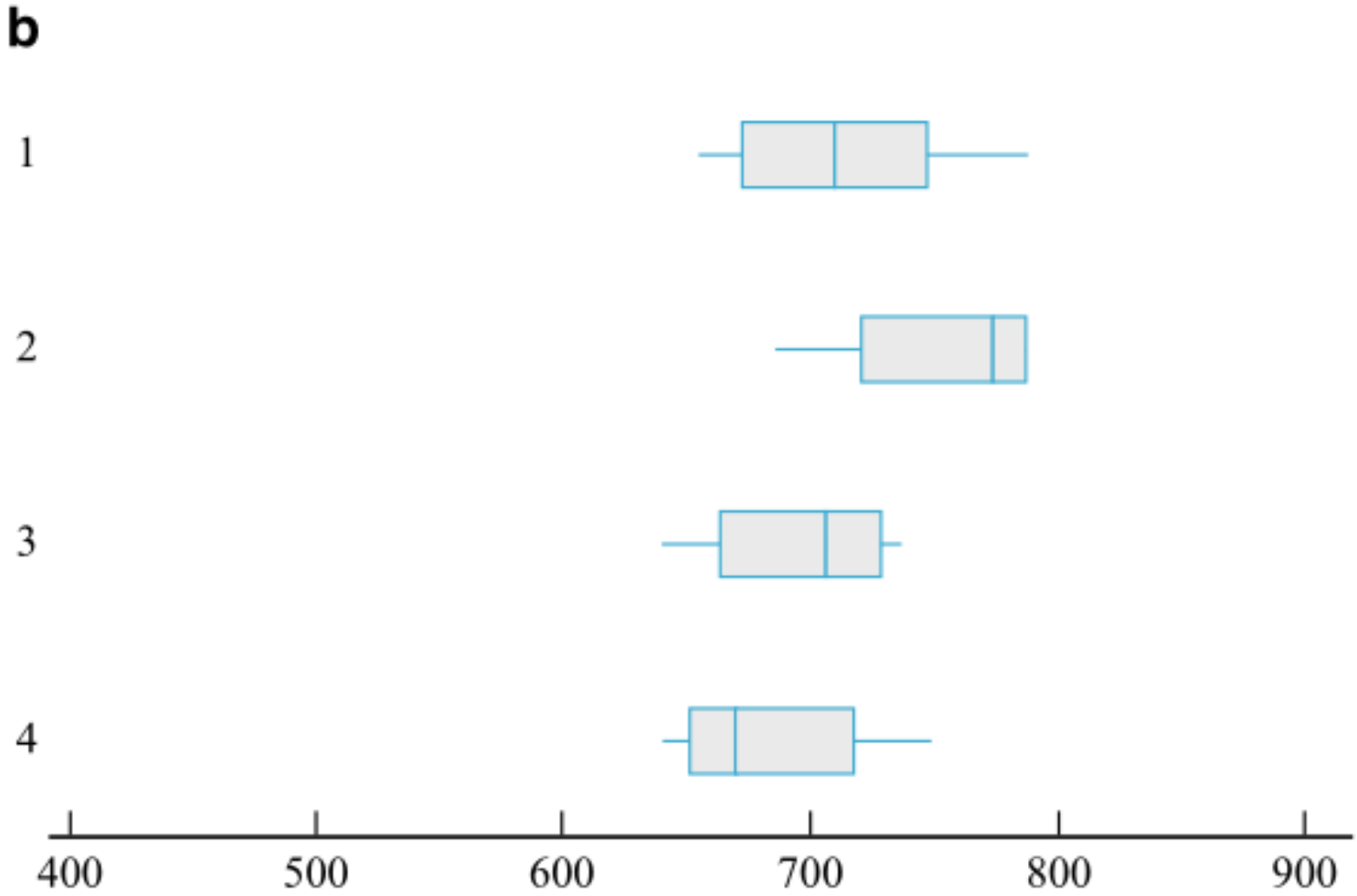
# Eksempel 11.1 - forts

Orginale data



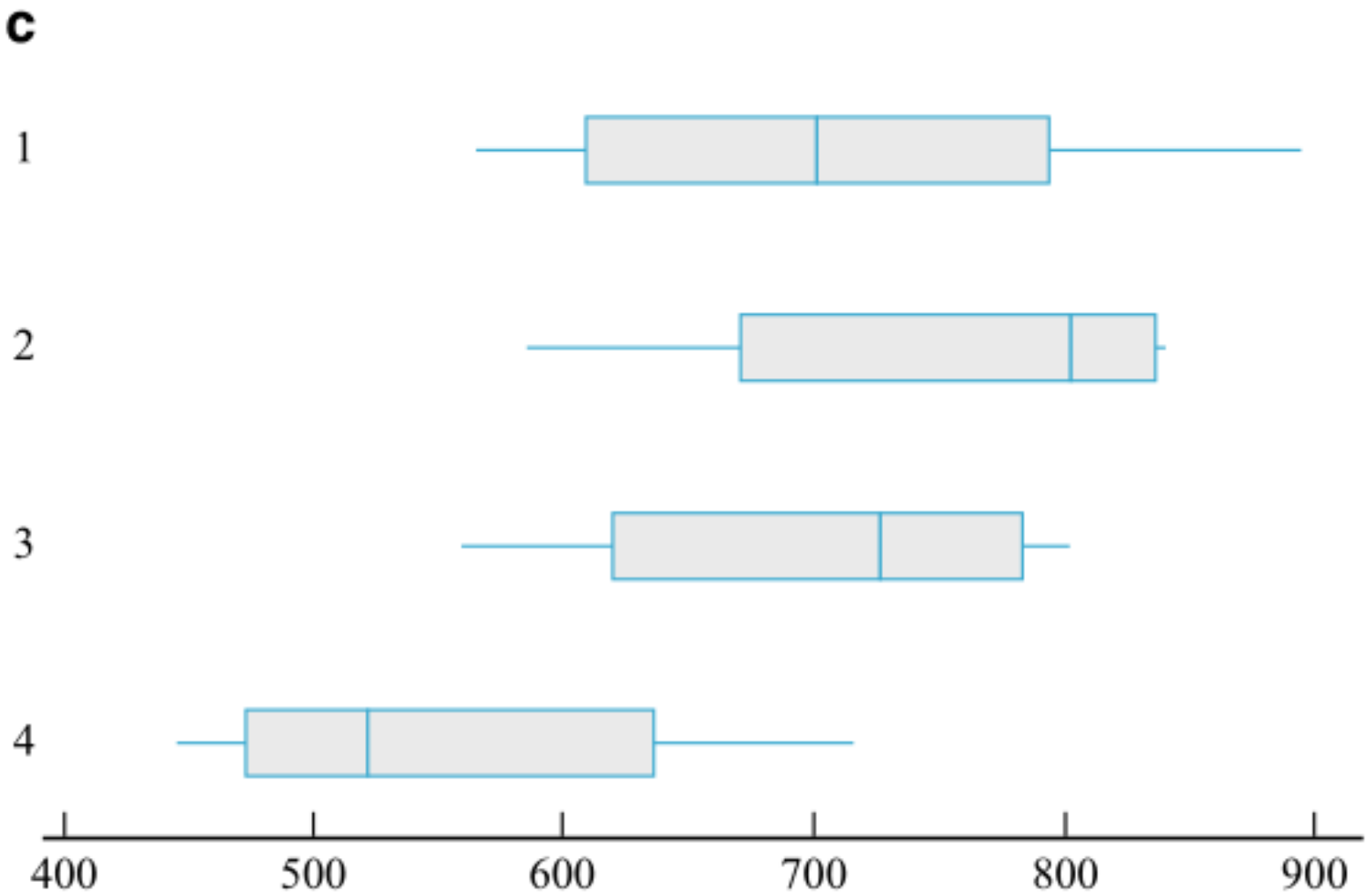
# Eksempel 11.1 - forts

Gruppe 4 manipulert: lagt til 120 til hver observasjon i gruppa



# Eksempel 11.1 - forts

Variabilitet manipulert i alle grupper, mens gruppegjennomsnittet er beholdt



# Utrykket variansanalyse?

- Vi er faktisk interessert i eventuelle forskjeller mellom forventningene i de ulike gruppene
- For å oppnå dette vil vi
- sammenligne variasjonen innad i gruppene
- med variasjonen mellom gruppene
- Hvis forskjellene mellom disse er stor nok indikerer dette at nullhypotesen ikke holder

Må spesifisere nærmere hva dette betyr.

Muligens ville variasjonsanalyse vært et bedre uttrykk enn variansanalyse.

# Variasjon innad i gruppene

- La, for $i = 1, \ldots, I$,

$$\bar{X}_{i.} = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} X_{ij}$$

$$S_i^2 = \frac{1}{J-1}\sum_{j=1}^{J}(X_{ij} - \bar{X}_{i.})^2, \quad i = 1, \ldots, I.$$

  være gjennomsnitt og empirisk standardavvik for gruppene.

- Videre defineres kvadratsum innad for alle gruppene ved

$$SSE = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(X_{ij} - \bar{X}_{i.})^2$$

- samt "mean square error" innad i alle gruppene ved

$$MSE = \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} S_i^2 = \frac{1}{I(J-1)}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(X_{ij} - \bar{X}_{i.})^2 = \frac{SSE}{I(J-1)},$$

- Får

$$\mathrm{E}(MSE) = \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\underbrace{\mathrm{E}(S_i^2)}_{\sigma^2} = \sigma^2, \text{ dvs. forventningsrett for } \sigma^2$$

# Variasjon mellom gruppene

- La $\bar{X}_{..} = \frac{1}{IJ}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} X_{ij}$ være det totale gjennomsnittet ("grand mean")
- Definer kvadratsummen mellom gruppene ved

$$SSTr = J\sum_{i=1}^{I}(\bar{X}_{i\cdot} - \bar{X}_{..})^2$$

- "Mean square error" mellom gruppene defineres deretter ved

$$MSTr = \frac{1}{I-1}SSTr$$

- Vi skal vise at også $\mathrm{E}(MSTr) = \sigma^2$
- men bare under $\mathrm{H}_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_I$
- Under $\mathrm{H}_a$ vil $\mathrm{E}(MSTr) > \sigma^2$

- Merk at $MSE$ er forventningsrett for $\sigma^2$ både under $\mathrm{H}_0$ og $\mathrm{H}_a$

# MSTr under $H_0$

Anta nå at $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_I = \mu$ holder.

Da gjelder

- $\bar{X}_{i\cdot} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{J}\right)$, $i = 1, \ldots, I$.
- Dessuten er $\bar{X}_{i\cdot}$-ene er uavhengige
- Dermed blir $\frac{1}{I-1}\sum_{i=1}^{I}(\bar{X}_{i\cdot} - \bar{X}_{\cdot\cdot})^2$ empirisk varians for $\bar{X}_{i\cdot}$-ene.
- og altså forventningsrett for $\sigma^2/J$
- Dermed er $MSTr = \frac{1}{I-1}SSTr = \frac{J}{I-1}\sum_{i=1}^{I}(\bar{X}_{i\cdot} - \bar{X}_{\cdot\cdot})^2$ forventningsrett for $\sigma^2$.

altså alt under $H_0$.

# F-testen for $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_I = \mu$

Vi har dermed etablert at $MSE = \frac{1}{I(J-1)} SSE$ og $MSTr = \frac{1}{I-1} SSTr$ er forventningsrette for $\sigma^2$ under nullhypotesen.

Vi skal teste nullhypotesen ved testobservator

$$F = \frac{MSTr}{MSE}$$

Det vil faktisk vise seg at

$$F \sim F_{I-1,I(J-1)},$$

altså F-fordelt med $I - 1$ og $I(J - 1)$ frihetsgrader når $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_I = \mu$ holder

Store verdier av $F$ indikere at nullhypotesen ikke holder. Dermed forkastes $H_0$ med nivå $\alpha$ dersom $F > F_{\alpha,I-1,I(J-1)}$ $= (1 - \alpha)$ 100 persentilen i $F_{I-1,I(J-1)}$-fordelingen.

# $\chi^2$-fordelte størrelser for variansanalyse

- Anta $Z_1, ..., Z_n \overset{uif}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$
- Da er

$$\frac{\sum_{j=1}^{n}(Z_j - \bar{Z})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

- Nå: $X_{ij} \overset{uif}{\sim} N(\mu_i, \sigma^2)$
- Gir

$$\frac{\sum_{j=1}^{J}(X_{ij} - \bar{X}_{i\cdot})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{J-1}$$

- Får da også at

$$\sum_{i=1}^{I} \frac{\sum_{j=1}^{J}(X_{ij} - \bar{X}_{i\cdot})^2}{\sigma^2} \sim \sum_{i=1}^{I} \underbrace{\chi^2_{J-1}}_{uavh} = \chi^2_{I(J-1)}$$

- Under $H_0$: $\bar{X}_{i\cdot} \overset{uif}{\sim} N(\mu, \sigma^2/J)$
- Gir

$$\frac{J\sum_{j=1}^{J}(\bar{X}_{i\cdot} - \bar{X}_{\cdot\cdot})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{I-1}$$

# Test og variansanalysetabell

- Vi har da at $\frac{SSTr}{\sigma^2} = \frac{J\sum_{i=1}^{I}(\bar{X}_{i\cdot}-\bar{X}_{\cdot\cdot})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{I-1}$ under $H_0$
- og $\frac{SSE}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(X_{ij}-\bar{X}_{i\cdot})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{I(J-1)}$
- og dessuten at disse størrelsene er uavhengige.
- Da er $F = \frac{SSTr/(I-1)}{SSE/(I(J-1))} = \frac{MSTr}{MSE} \sim F_{I-1,I(J-1)}$.
- En test for
  $H_0 : \mu_1 = \ldots = \mu_I$ mot $H_a$ : minst to $\mu_i$-er er forskjellige
  med signifikansnivå $\alpha$ er dermed gitt ved å forkaste $H_0$
  dersom $F > F_{\alpha,I-1,I(J-1)}$.

- Vi sammenfatter ofte resultatene i en såkalt

  Variansanalysetabell (ANOVA tabell):

| **Kilde til var.** | **Df** | **SS** | **MS** | **f** |
|---|---|---|---|---|
| Behandlinger | $I-1$ | $SSTr$ | $MSTr = SSTr/(I-1)$ | $MSTr/MSE$ |
| Feil | $I(J-1)$ | $SSE$ | $MSE = SSE/(I(J-1))$ | |
| Total | $IJ-1$ | $SST$ | | |

# Forventning MSTr under $H_a$ (og under $H_0$)

- Definerte

$$MSTr = \frac{SSTr}{I-1} = \frac{J}{I-1}\sum_{i=1}^{I}(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})^2,$$

- Generelt kan det vises at

$$\mathrm{E}(MSTr) = \mathrm{E}\left(\frac{SSTr}{I-1}\right) = \sigma^2 + \frac{J}{I-1}\sum_{i=1}^{I}(\mu_i - \bar{\mu})^2,$$

  der $\bar{\mu} = \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\mu_i$.
- Under $H_0$: $\mu_i = \bar{\mu}$ forsvinner siste ledd og vi får altså

$$\mathrm{E}(MSTr) = \sigma^2$$

- Men hvis $H_0$ er gal: $\mathrm{E}(MSTr) > \sigma^2$

# Dekomponering av variasjon

- Den totale kvadratsummen er gitt ved

$$SST = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(X_{ij} - \bar{X}_{..})^2$$

- Vi kan da dekomponere $SST = SSTr + SSE$
- Tilsvarende har vi for antall frihetsgrader er $df_{Tot} = I - 1 + I(J-1) = IJ - 1$.
- Den totale variasjonen kan altså dekomponeres i variasjonen som skyldes forskjellige behandlinger ($SSTr$) og variasjonen som skyldes tilfeldige feil ($SSE$).
- Hvis $SSTr$ er liten sammenlignet med $SSE$, er det lite som motsier $H_0$.
- Derimot vil en stor $SSTr$ sammenlignet med $SSE$ være en indikasjon på at $H_0$ ikke stemmer.

## Eksempel

Fettopptak i rotter.

# Utledning av SST = SSTr+SSE

Siden $SST = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(X_{ij} - X_{..})^2$ får vi

$$\begin{aligned} SST &= \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(X_{ij} - \bar{X}_{i.} + \bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})^2 \\ &= \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(X_{ij} - \bar{X}_{i.})^2 + \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})^2 \\ &\quad +2\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(X_{ij} - \bar{X}_{i.})(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..}) \\ &= SSE + \sum_{i=1}^{I} J(\bar{X}_{i.} - X_{..})^2 = SSE + SSTr \end{aligned}$$

fordi

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}(X_{ij} - \bar{X}_{i.})(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..}) = \sum_{i=1}^{I}(\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})\sum_{j=1}^{J}(X_{ij} - \bar{X}_{i.}) = 0$$

siden $\sum_{j=1}^{J}(X_{ij} - \bar{X}_{i.}) = 0$.

# Sjekk av antakelser - normalfordeling

- For å kunne teste antakelsene vi har gjort, trenger vi å definere feilleddene ved $\varepsilon_{ij} = X_{ij} - \mu_i$.
- Vi har antatt at $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$ og at $\varepsilon_{ij}$-ene er uavhengige.
- Disse kan approksimeres med residualene $e_{ij} = X_{ij} - \bar{X}_{i\cdot}$
- Hvis antakelsene våre stemmer, vil $e_{ij} \overset{tiln.}{\sim} N(0, \sigma^2)$.
- Antakelsen om normalfordeling kan vi sjekke med et normalt kvantilplott av $e_{ij}$-ene.

## Eksempel

Fettopptak i rotter.

# Sjekk av antagelser - like varianser

- For å sjekke antakelsen om lik varians kan vi enten bruke log-likelihood ratio-testen (kalles Bartletts test i denne sammenhengen) eller Levenes test, som er en ANOVA F-test basert på $|x_{ij} - \bar{x}_{i.}|$ i stedet for $x_{ij}$.
- Sistnevnte test er mer robust overfor antakelsen om normalfordeling.

## Eksempel

Fettopptak i rotter.
Eksempel 11.1

# Alternativ formulering

- Enveis variansanalyse kan reformuleres til en form som er lettere å utvide til flerveis variansanalyse og også lettere ses i sammenheng med lineær regresjon.
- La

$$\bar{\mu} = \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} \mu_i \quad \text{og} \quad \alpha_i = \mu_i - \bar{\mu}.$$

- Da er

$$X_{ij} = \bar{\mu} + \alpha_i + \varepsilon_{ij}, \quad \text{der} \sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 0.$$

- Hypotesetesten kan da reformuleres til

$$H_0 : \alpha_1 = \ldots = \alpha_I = 0 \quad \text{mot} \quad H_a : \alpha_i \neq 0 \text{ for minst én } i.$$

- Videre er
$\mathrm{E}(MSTr) = \sigma^2 + \frac{J}{I-1}\sum_{i=1}^{I}(\mu_i - \bar{\mu})^2 = \sigma^2 + \frac{J}{I-1}\sum_{i=1}^{I}\alpha_i^2.$

# Enveis ANOVA med ulike antall observasjoner i gruppene

Enveis ANOVA kan generaliseres til ulike gruppestørrelser $J_i$.

Modellen er da: $X_{ij} \sim \mathrm{N}(\mu_i, \sigma), j = 1, \cdots, J_i, i = 1, \cdots, I$ uavh.

Vi må modifisere, med $n = \sum_{i=1}^{I} J_i$ = totalt antall observasjoner og $\bar{X}_{..} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J_i} X_{ij}$ = totalt gj.snitt,

$$SSTr = \sum_{i=1}^{I} J_i (\bar{X}_{i.} - \bar{X}_{..})^2 \quad , \quad MSTr = \frac{1}{I-1} SSTr$$

$$SSE = \sum_{i=1}^{I} (J_i - 1) S_i^2 \quad , \quad MSE = \frac{1}{n-I} SSE$$

Testobservator for $\mathrm{H}_0 : \mu_1 = \cdots = \mu_I = \mu$ er da fortsatt

$$F = \frac{MSTr}{MSE} \sim F_{I-1, n-I} \text{ under } \mathrm{H}_0$$

og vi forkaster når F er tilstrekkelig stor.