STK1110 Høsten 2026

Hypotesetesting og konfidensintervaller for to utvalg

Kapittel 10

Ett og to utvalg

Så langt: Ett enkelt tilfeldig utvalg $X_1, ..., X_n$ uif fra $f(x; \theta)$ - simple random sample

- Estimering Kapittel 7
- Konfidensintervall - Kapittel 8
- Hypotestesting - Kapittel 9

Statistisk inferens spesielt for ett utvalg.
Men: Utviklet samtidig generelle begreper og metodikk for inferens
Disse vil benyttes for andre og mer komplekse datasituasjoner.

Først Kap. 10:

- To grupper/utvalg av data med forskjellige fordelinger
- Interessert i forskjeller
- Er disse reelle eller skyldes de bare tilfeldigheter?
- Kan forskjellene tilskrives årsaker
- eller skyldes de kun underliggende ("lurkende") variable?

Oversikt over Kapittel 10

- Er forventninger i to grupper ulike?
  Avsnitt 10.1 og 10.2. Tirsdag 22/9

- Analyse av parede data
- Også om forventninger er ulike med forskjellige behandlinger
- men med annen forsøksplan
  Avsnitt 10.3. Torsdag 24/9

- Sammenligning av to populasjonsandeler.
  Avsnitt 10.4. Torsdag 24/9.

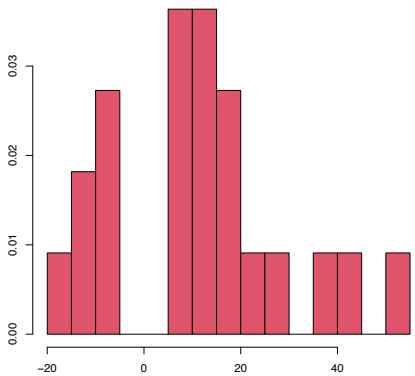
- Sammenligning av varianser i to gruppe, F-fordeling
  Avsnitt 10.5 og 6.3. Tirsdag 29/9

- Avsnitt 10.6 er ikke pensum

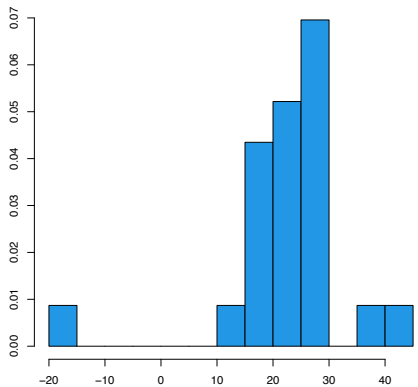
Eksempel

I et forsøk ble 22 rotter utsatt for ozon (behandlede), mens 23 andre ikke ble det (kontroll). Så registrerte en rottenes vektøkning i gram i løpet av en uke.

Behandlede rotter



Kontrollgruppe



- Hvordan gi et anslag på forskjellen i vektøkning?
- Hvor sikkert er dette anslaget?
- Kan vi med rimelig grad av sikkerhet si at det er en forskjell i vektøkning mellom behandlede og ubehandlede rotter?

Hypotesetester og konfidensintervaller for $\mu_1 - \mu_2$

Vi antar at

- $X_1, \ldots, X_m$ er uif med forventning μ_1 og varians σ_1^2,
- $Y_1, \ldots, Y_n$ er uif med forventning μ_2 og varians σ_2^2,
- og at X_i-ene og Y_i-ene er uavhengige.

Vi er spesielt interessert (Avsnitt 9.1 og 9.2) i å

- lage konfidensintervaller (KI) for $\mu_1 - \mu_2$
- og teste hypoteser knyttet til $\mu_1 - \mu_2$.

Vi skal se på tre forskjellige tilfeller:

- normalfordelte data med kjente varianser,
- store utvalg med ukjente varianser
- små normalfordelte utvalg med ukjente varianser.

Vi vil benytte ulike tester hvis

- variansene i gruppene er like ($\sigma_1 = \sigma_2$)
- variansene er ulike ($\sigma_1 \neq \sigma_2$)

KI for $\mu_1 - \mu_2$, normalfordelte data med kjent varians

- Anta at $X_1, \ldots, X_m \overset{uif}{\sim} N(\mu_1, \sigma_1^2)$ og $Y_1, \ldots, Y_n \overset{uif}{\sim} N(\mu_2, \sigma_2^2)$, med σ_1 og σ_2 kjent.
- En naturlig estimator for $\mu_1 - \mu_2$ er $\bar{X} - \bar{Y}$.
- Vi har

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\bar{X} - \bar{Y}) &= \mathrm{E}(\bar{X}) - \mathrm{E}(\bar{Y}) = \mu_1 - \mu_2 \\ \mathrm{V}(\bar{X} - \bar{Y}) &\overset{uavh.}{=} \mathrm{V}(\bar{X}) + (-1)^2 \cdot \mathrm{V}(\bar{Y}) = \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n} \end{aligned}$$

- Da $\bar{X}$ og $\bar{Y}$ er normalfordelt, må $\bar{X} - \bar{Y}$ også være det, slik at også

$$\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}\right)$$

og

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0, 1).$$

Normalfordelte data med kjente varianser (forts.)

- Vi får:

$$\mathrm{P}\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} \leq z_{\alpha/2}\right) = 1 - \alpha$$

slik at også

$$\mathrm{P}\left(\bar{X} - \bar{Y} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{X} - \bar{Y} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}\right)$$

$$= 1 - \alpha.$$

- Et $100 \cdot (1 - \alpha)\%$ konfidensintervall for $\mu_1 - \mu_2$ blir dermed

$$\bar{x} - \bar{y} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}.$$

Konfidensintervall for $\mu_1 - \mu_2$, store utvalg med ukjente varianser

Anta at

- $X_1, \ldots, X_m$ er uif med forventning μ_1 og varians σ_1^2,
- $Y_1, \ldots, Y_n$ er uif med forventning μ_2 og varians σ_2^2,
- med σ_1 og σ_2 ukjent.
- Anta videre at m og n er så store at vi ikke trenger å anta normalfordeling for X_i-ene og Y_i-ene.
- Vi trenger å estimere σ_1^2 og σ_2^2, og forventningsrette estimatorer for disse er

$$S_1^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X})^2 \quad \text{og} \quad S_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2.$$

Store utvalg med ukjente varianser (forts.)

- Nå er
$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{m} + \frac{S_2^2}{n}}} \overset{\text{tiln.}}{\sim} N(0,1).$$

- Et tilnærmet $100 \cdot (1-\alpha)\%$ konfidensintervall for $\mu_1 - \mu_2$ er da
$$\bar{x} - \bar{y} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{m} + \frac{s_2^2}{n}}.$$

Eksempel

Eks. med studenter i Kalkulus I (eks. 10.5 fra utgave 2 av boka).

Konfidensintervall for $\mu_1 - \mu_2$, normalfordelte data med ukjente, like varianser

- Anta at $X_1, \ldots, X_m$ er uif med forventning μ_1 og varians σ_1^2, $Y_1, \ldots, Y_n$ er uif med forventning μ_2 og varians σ_2^2, med σ_1 og σ_2 ukjent.
- Anta videre at m og n ikke er store nok til å bruke resultatene for store utvalg.
- Da trenger vi i tillegg å anta normalfordeling, altså $X_1, \ldots, X_m \overset{uif}{\sim} N(\mu_1, \sigma_1^2)$ og $Y_1, \ldots, Y_n \overset{uif}{\sim} N(\mu_2, \sigma_2^2)$.
- Først antar vi at $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$.
- La

$$S_p^2 = \frac{m-1}{m+n-2} S_1^2 + \frac{n-1}{m+n-2} S_2^2.$$

som sammenslått (pooled) estimator for felles σ^2

Egenskaper sammenslått ("pooled") variansestimator S_p^2

- S_p^2 er forventningsrett for σ^2
- Bevis: $\mathrm{E}(S_p^2) = \frac{m-1}{m+n-2} E(S_1^2) + \frac{n-1}{m+n-2} E(S_2^2)$
  $= \frac{m-1}{m+n-2}\sigma^2 + \frac{n-1}{m+n-2}\sigma^2 = \sigma^2$

- $\frac{(m+n-2)}{\sigma^2} S_p^2 \sim \chi^2_{m+n-2}$
- Bevis: Dette følger av at $\frac{(m-1)}{\sigma^2} S_1^2 \sim \chi^2_{m-1}$ og $\frac{(n-1)}{\sigma^2} S_2^2 \sim \chi^2_{n-1}$ og at S_1^2 og S_2^2 er stokastisk uavhengige.

- Merk samtidig at $\bar{X} - \bar{Y}$ er uavhengig av S_1^2 og S_2^2 og dermed også uavhengig av S_p^2

- Minner også om definisjonen av t-fordeling: $T = \frac{Z}{\sqrt{U/\nu}} \sim t_\nu$ når $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$ og $U \sim \chi^2_\nu$ er uavhengige.

Normalfordelte data med ukjente, like varianser (forts.)

- $\bar{X} - \bar{Y}$ og S_p^2 er uavhengige, S_p^2 er forventningsrett for σ^2 og $\frac{(m+n-2)}{\sigma^2} S_p^2 \sim \chi^2_{m+n-2}$.
- Da er

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim t_{m+n-2}.$$

- Det gir

$$\mathrm{P}\left(-t_{\alpha/2,m+n-2} \leq \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \leq t_{\alpha/2,m+n-2} \right) = 1-\alpha.$$

- Et $100 \cdot (1-\alpha)\%$ konfidensintervall for $\mu_1 - \mu_2$ er da

$$\bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2,m+n-2} s_p \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}.$$

Normalfordelte data med ukjente, ulike varianser

- Anta nå at $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.
- Vi lar

$$T = \frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{m}+\frac{s_2^2}{n}}} = \frac{(\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2))/\sqrt{\sigma_1^2/m+\sigma_2^2/n}}{\sqrt{\left(\frac{s_1^2}{m}+\frac{s_2^2}{n}\right)/\left(\sigma_1^2/m+\sigma_2^2/n\right)}}$$

$$= \frac{Z}{\sqrt{U/\nu}},$$

der

- $Z = (\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2))/\sqrt{\sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n} \sim N(0,1)$
- $U/\nu = \left(\frac{s_1^2}{m} + \frac{s_2^2}{n}\right) / \left(\sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n\right)$ er uavhengig av Z,
- men U er ikke χ^2_ν-fordelt!

Normalfordelte data med ukjente, ulike varianser (forts.)

- Vi kan imidlertid tilnærme U med en χ^2_ν-fordeling, der parameteren ν justeres slik at U/ν får riktig forventning og varians.
- Det gjør vi ved å la (se s. 579 i DBC)

$$\nu = \frac{\left(\sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n\right)^2}{\left(\frac{\sigma_1^2}{m}\right)^2/(m-1) + \left(\frac{\sigma_2^2}{n}\right)^2/(n-1)}.$$

- Da σ_1^2 og σ_2^2 er ukjent, benyttes i praksis

$$\nu = \frac{\left(s_1^2/m + s_2^2/n\right)^2}{\left(\frac{s_1^2}{m}\right)^2/(m-1) + \left(\frac{s_2^2}{n}\right)^2/(n-1)}. \qquad (1)$$

Normalfordelte data med ukjente, ulike varianser (forts.)

- Dermed er

$$\frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{m} + \frac{S_2^2}{n}}} \overset{\text{tiln.}}{\sim} t_\nu,$$

  der ν er gitt ved (1).
- Et tilnærmet $100 \cdot (1 - \alpha)\%$ konfidensintervall for $\mu_1 - \mu_2$ er da

$$\bar{x} - \bar{y} \pm t_{\alpha/2,\nu} \sqrt{\frac{s_1^2}{m} + \frac{s_2^2}{n}}.$$

Eksempel

Vektøkning for rotter.

Hypotesetester ang. $\mu_1 - \mu_2$, normalfordelte data med kjent varians

- Vi ønsker å teste hypoteser av typen
  - $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \Delta_0$ mot $H_a : \mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$
  - $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \Delta_0$ mot $H_a : \mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$
  - $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$ mot $H_a : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$.
- Som regel er $\Delta_0 = 0$.
- Anta at $X_1, \ldots, X_m \overset{uif}{\sim} N(\mu_1, \sigma_1^2)$ og $Y_1, \ldots, Y_n \overset{uif}{\sim} N(\mu_2, \sigma_2^2)$, med σ_1 og σ_2 kjent.
- Vi begynner med å se på tester av typen $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \Delta_0$ mot $H_a : \mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$.
- Da forkaster vi H_0 dersom $\bar{X} - \bar{Y} \geq k$, som tilsvarer

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} \geq \frac{k - \Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} = \tilde{k}.$$

- Hvis $\mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$ så er $Z \sim N(0, 1)$

Normalfordelte data med kjent varians (forts.)

- Det gjenstår å finne $\tilde{k}$ slik at testen får signifikansnivå α.
- Vi får

$$\mathrm{P}(\text{Feil av type I}) \leq \mathrm{P}(Z \geq \tilde{k} | \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0) = 1 - \Phi(\tilde{k}) = \alpha.$$

- Det gir $\tilde{k} = \Phi^{-1}(1-\alpha) = z_\alpha$, og vi forkaster dermed H_0 dersom $Z \geq z_\alpha$.
- En test for $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \Delta_0$ mot $H_a : \mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$ med signifikansnivå α får vi tilsvarende ved å forkaste H_0 dersom $Z \leq -z_\alpha$.
- En test for $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$ mot $H_a : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$ med signifikansnivå α får vi ved å forkaste H_0 dersom $Z \leq -z_{\alpha/2}$ eller $Z \geq z_{\alpha/2}$.

Alternativt: P-verdier for to-utvalgs tester om μ_1 og μ_2

normalfordelte data med kjente σ_1 og σ_2.

La $Z \sim \mathrm{N}(0,1)$

- Vi observerer differans i gjennomsnitt $\bar{x} - \bar{y}$ og beregner testobservator $z = (\bar{x} - \bar{y} - \Delta_0)/\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}$
- For $\mathrm{H}_a : \mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$ blir P-verdien blir $\mathrm{P}(Z > z)$
- For $\mathrm{H}_a : \mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$ blir P-verdien blir $\mathrm{P}(Z < z)$
- For $\mathrm{H}_a : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$ blir P-verdien blir $\mathrm{P}(Z < -|z|) + \mathrm{P}(Z > |z|) = 2\mathrm{P}(Z > |z|)$

Styrkefunksjon - Normalfordelte data med kjent varians

- Vi går tilbake til testen for $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \Delta_0$ mot $H_a : \mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$. Da er styrkefunksjonen gitt ved:

$$\begin{aligned}\gamma(\Delta) = & \quad P\left(\frac{\bar{X}-\bar{Y}-\Delta_0}{\sqrt{\sigma_1^2/m+\sigma_2^2/n}} \geq z_\alpha \mid \mu_1 - \mu_2 = \Delta\right) \\ & = 1 - \Phi\left(z_\alpha - \frac{\Delta-\Delta_0}{\sqrt{\sigma_1^2/m+\sigma_2^2/n}}\right), \quad \Delta = \mu_1 - \mu_2.\end{aligned}$$

- Vi ønsker nå å bestemme m og n slik at sannsynligheten for feil av type II blir høyst β for $\Delta = \Delta' > \Delta_0$.
- Vi skal altså løse $\beta = 1 - \gamma(\Delta') = \Phi\left(z_\alpha - \frac{\Delta'-\Delta_0}{\sqrt{\sigma_1^2/m+\sigma_2^2/n}}\right)$ for m og n.
- Hvis vi lar $m = n$, får vi $m = n = \left(\frac{z_\alpha+z_\beta}{\Delta'-\Delta_0}\right)^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Styrkefunksjon - Normalfordelte data med kjent varians II

- For tester av typen $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \Delta_0$ mot $H_a : \mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$ blir styrkefunksjonen tilsvarende:

$$\gamma(\Delta) = \Phi\left(-z_\alpha - \frac{\Delta - \Delta_0}{\sqrt{\sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n}}\right).$$

- De m og n, med $m = n$, som er slik at sannsynligheten for feil av type II blir høyst β for $\Delta = \Delta' < \Delta_0$ blir gitt ved samme formel som på forrige foil.

Styrkefunksjon - Normalfordelte data med kjent varians III

- For tester av typen $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$ mot $H_a : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$ blir styrkefunksjonen:

$$\begin{aligned}\gamma(\Delta) =& \Phi\left(-z_{\alpha/2} - \frac{\Delta - \Delta_0}{\sqrt{\sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n}}\right) \\ &+ 1 - \Phi\left(z_{\alpha/2} - \frac{\Delta - \Delta_0}{\sqrt{\sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n}}\right).\end{aligned}$$

- For å oppnå at sannsynligheten for feil av type II blir høyst β for $\Delta = \Delta' \neq \Delta_0$ kan en sette $m = n = \left(\frac{z_{\alpha/2} + z_\beta}{\Delta' - \Delta_0}\right)^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$ som en tilnærmelse.

Hypotesetester ang. $\mu_1 - \mu_2$, store utvalg med ukjente varianser

- Anta at $X_1, \ldots, X_m$ er uif med forventning μ_1 og varians σ_1^2, $Y_1, \ldots, Y_n$ er uif med forventning μ_2 og varians σ_2^2, med σ_1 og σ_2 ukjent.
- Anta videre at m og n er så store at vi ikke trenger å anta normalfordeling for X_i-ene og Y_i-ene.
- For å teste hypoteser ang. $\mu_1 - \mu_2$ kan vi da bruke samme tester som for normalfordelte data med kjente varianser, bare at σ_1^2 og σ_2^2 byttes ut med S_1^2 og S_2^2.
- For å finne m og n slik at sannsynlighet for feil av type II blir høyst β for $\Delta = \Delta'$ i samsvar med H_a bruker en samme formler som for normalfordelte data med kjente varianser, der en bruker anslag for σ_1^2 og σ_2^2, f.eks. basert på en pilotstudie eller lignende studier.

Eksempel

Eks. 10.8 fra boka.

Hypotesetester ang. $\mu_1 - \mu_2$, normalfordelte data med ukjente varianser

- Anta nå at m og n ikke er store nok til å bruke resultatene for store utvalg.
- Da trenger vi å anta normalfordeling, altså $X_1, \ldots, X_m \overset{uif}{\sim} N(\mu_1, \sigma_1^2)$ og $Y_1, \ldots, Y_n \overset{uif}{\sim} N(\mu_2, \sigma_2^2)$.
- Vi vil se på de to tilfellene $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ og $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$.
- I begge tilfeller har vi en observator på formen $T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta_0}{V}$, der $T \overset{(tiln.)}{\sim} t_\nu$ når $\mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$.
- I begge tilfeller får vi følgende tester med (tilnærmet) signifikansnivå α:
  - $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \leq \Delta_0$ mot $H_a : \mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$:
    Forkast H_0 dersom $T \geq t_{\alpha,\nu}$
  - $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \geq \Delta_0$ mot $H_a : \mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$:
    Forkast H_0 dersom $T \leq -t_{\alpha,\nu}$
  - $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$ mot $H_a : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$:
    Forkast H_0 dersom $T \leq -t_{\alpha/2,\nu}$ eller $T \geq t_{\alpha/2,\nu}$.

Normalfordelte data med ukjente varianser (forts.)

- Når $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, lar vi $V = \sqrt{\frac{S_1^2}{m} + \frac{S_2^2}{n}}$.
- Når $\mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$, er da T tilnærmet t_ν-fordelt med $\nu = \frac{\left(s_1^2/m + s_2^2/n\right)^2}{\left(\frac{s_1^2}{m}\right)^2/(m-1) + \left(\frac{s_2^2}{n}\right)^2/(n-1)}$.
- Når $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, lar vi $V = S_p\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}$, med $S_p^2 = \frac{m-1}{m+n-2}S_1^2 + \frac{n-1}{m+n-2}S_2^2$.
- Når $\mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$, er da $T \sim t_{m+n-2}$ (eksakt).

Eksempel

Vektøkning for rotter.

Normalfordelte data med ukjente varianser (forts.)

- For å beregne styrkefunksjonen til testene når $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ trenger vi fordelingen til $T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - \Delta_0}{S_p \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}$ når $\mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$.
- Dette er en såkalt ikke-sentral t-fordeling, som vi ikke skal gå nærmere inn på i dette kurset.
- I stedet kan vi bruke R-funksjonen `power.t.test()`.
- Denne kan gi oss styrkefunksjonen, sannsynlighet for feil av type II, samt m og n slik at sannsynligheten for feil av type II blir høyst β for en Δ i samsvar med H_a.

Oppsummering

- Normalfordelte variable med kjente varianser

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/m + \sigma_2^2/n}} \sim N(0,1)$$

- Store utvalg, ukjente varianser:

$$Z = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s_1^2/m + s_2^2/n}} \overset{tiln.}{\sim} N(0,1)$$

- Normalfordelt, ukjente varianser:
  - Like varianser, $s_p^2 = ((m-1)s_1^2 + (n-1)s_2^2)/(n+m-2)$,

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{s_p\sqrt{1/m + 1/n}} \sim t_{m+n-2}$$

  - Ulike varianser:

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{s_1^2/m + s_2^2/n}} \overset{tiln.}{\sim} t_\nu$$

$$\nu = \frac{\left(s_1^2/m + s_2^2/n\right)^2}{\left(\frac{s_1^2}{m}\right)^2/(m-1) + \left(\frac{s_2^2}{n}\right)^2/(n-1)}$$

Valg av t-test (og KI) med lik og ulik varians?

- Vi så at t-observatoren med like varianser gir eksakt t-fordeling når antagelsen om $\sigma_1 = \sigma_2$ holder
- Dette har vært den tradisjonelle metoden å gjøre t-tester på
- delvis på grunn av komplisert formel for antall frihetsgrader(?)

- Man taper noen frihetsgrader med ulik variansmetoden,
- men ikke mange hvis $n \approx m$ eller $s_1 \approx s_2$
- Hvis derimot forskjellen på σ_1 og σ_2 er stor kan testen med like varianser bli misvisende
- Derfor er tryggest i praksis å bruke varianten med ulike t-test med ulike varianser
- Vi skal se på en test for likhet mellom variansene, men denne er sensitiv til normalitetsantagelsen

Parforsøk

- Så langt har vi antatt at X_i-ene og Y_i-ene i de to utvalgene er uavhengige.
- Det er naturlig dersom de er knyttet til to forskjellige populasjoner.
- I en del tilfeller gjelder imidlertid ikke denne antakelsen, f.eks. hvis X_i og Y_i er to målinger på samme person i et medisinsk forsøk.
- Da kan en i stedet organisere målingene parvis.

Eksempel parforsøk

- Vil sammenligne en ny salve mot eksem på hendene med en som har vært brukt tidligere.
- Er den nye salven bedre?
- I forbindelse med Kap. 9 diskuterte vi et parforsøk for dette:
- Rekrutter pasienter med eksem på begge hender
- Trekk tilfeldig (randomiser) hvilken hånd som får ny salve. Den andre får den tradisjonelle
- Inspiser etter noen uker hvilken hånd som er best
- Tell opp antall personer som responderer best på ny salve og sammenlign med Bin$(n, 0.5)$

- Vi kunne også tenke oss å kvantifisere grad av eksem på begge hendene
- Da er vi i situasjonen i Avsnitt 9.3

Parforsøk (forts.)

- Anta at vi har par av observasjoner $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$, med $\mathrm{E}(X_i) = \mu_1$ og $\mathrm{E}(Y_i) = \mu_2$.
- Er interessert i forskjellen $\mu_1 - \mu_2$
- La $D_i = X_i - Y_i$, $i = 1, \ldots, n$.
- Anta at $D_1 \ldots, D_n \overset{uif}{\sim} N(\mu_D, \sigma_D)$, der $\mu_D = \mathrm{E}(D_i) = \mathrm{E}(X_i) - \mathrm{E}(Y_i) = \mu_1 - \mu_2$ og $\sigma_D^2 = \mathrm{V}(D_i)$.
- Vi kan da bruke metodene for ett normalfordelt utvalg til å lage konfidensintervall (Kap. 8) og tester (Kap. 9) for $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$.

Eksempel

Eks. 10.11 i boka.

Konfidensintervall og testobservatorer for parforsøk

Basert på $D_i \sim \mathrm{N}(\mu_1 - \mu_2, \sigma_D)$ uif, $i = 1, \ldots, n$ blir da konfidensintervallene for $\mu_1 - \mu_2$ på formen

$$\bar{D} \pm t_{\alpha/2} \frac{S_D}{\sqrt{n}} = \bar{X} - \bar{Y} \pm t_{\alpha/2} \frac{S_D}{\sqrt{n}}$$

der $\bar{D} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} D_i$, $S_D^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (D_i - \bar{D})^2$ og $t_\alpha = 1 - \alpha$ kvantilen i $t-$fordelingen med $n - 1$ frihetsgrader.

Tilsvarende baseres tester for $\mathrm{H}_0^a : \mu_1 = \mu_2$, $\mathrm{H}_0^b : \mu_1 \leq \mu_2$ og $\mathrm{H}_0^c : \mu_1 \geq \mu_2$ på testobservator (av typen)

$$t = \frac{\bar{D}}{S_D} \sqrt{n} \sim t_{n-1} \text{ når } \mu_1 = \mu_2$$

Parforsøk eller to uavhengige grupper?

- Når bør en bruke t-test for pardata og når er det bedre å bruke en t-test for to uavhengige, like store utvalg?

- Testobservator for parforsøk: $T = \frac{\bar{D}}{S_D/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X}-\bar{Y}}{S_D/\sqrt{n}}$, der $S_D^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \bar{D})^2$ er en estimator for σ_D^2.

- Testobservator for to uavhengige like store grupper ($m = n$):

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(S_1^2 + S_2^2)/n}},$$

der $S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ og $S_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2$ er estimatorer for henholdvis $\sigma_1^2 = \mathrm{V}(X_i)$ og $\sigma_2^2 = \mathrm{V}(Y_i)$.

- Forskjellen på disse to er nevnerne.

Parforsøk eller to uavhengige grupper? (forts.)

- For pardata har vi:

$$\sigma_D^2 = \mathrm{V}(X_i - Y_i) = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho,$$

  der $\rho = \mathrm{Corr}(X_i, Y_i)$.
- For uavhengige grupper har vi

$$\mathrm{V}(X_i - Y_i) \overset{uavh.}{=} \sigma_1^2 + \sigma_2^2.$$

- Hvis ρ er positiv og stor, er dermed σ_D^2 mye mindre enn $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$, og da er det best å bruke framgangsmåten for parforsøk, fordi det da er lettere å oppdage forskjeller mellom gruppene.

Noen flere eksempler på "naturlige" par - for parforsøk

- Kroppsdeler i par: Armer, hender, ben, føtter, øyer, ...
- Tvillinger (evt. søsken)
- Samme person med
  - ulike behandlinger
  - i ulike tidsperioder
- Individer som "matches" til par
  - Like på forskjellige bakgrunnsvariable
  - som også kan spille inn på utfallet, f.eks.
  - Kjønn, alder, region, yrke
  - og/eller livstilsvariable

Sammenligning av to binomiske variabel, Avsnitt 9.4

La

- $X \sim$ bin(m, p_1)
- $Y \sim$ bin(n, p_2)
- X og Y er uavhengige

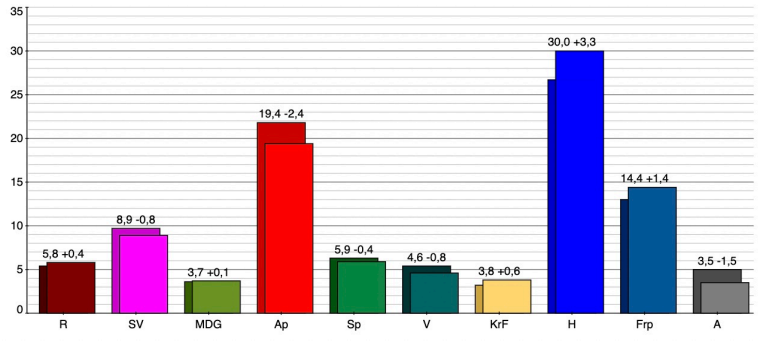
Av interesse å undersøke forskjeller mellom p_1 og p_2 med

- konfidensintervall for $p_1 - p_2$
- test for $p_1 = p_2$

Eksempel: Meningsmålinger.

Eksempel

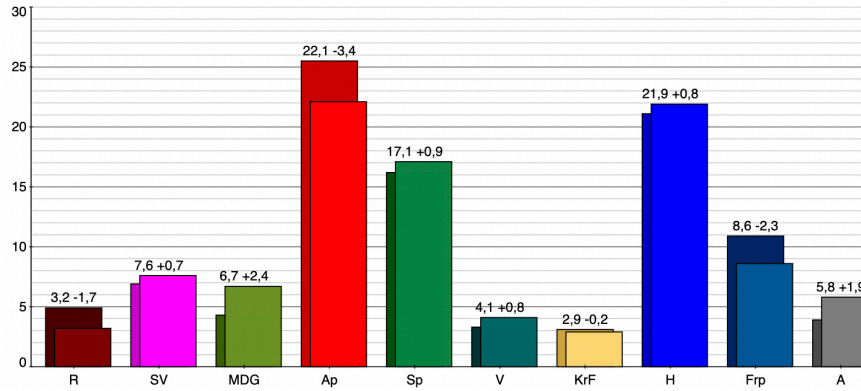
Norstat for NRK / Aftenposten 17. august 2022



Fakta om meningsmålingen

Valg	Stortingsvalg
Område	Hele landet
Institutt	Norstat
Antall spurte	960
Tatt opp	9/8 - 14/8

Norstat for NRK / Aftenposten 17. august 2021



Fakta om meningsmålingen

Valg	Stortingsvalg
Område	Hele landet
Institutt	Norstat
Antall spurte	948
Tatt opp	10/8 - 13/8

- I august 2022 var det 41 av 691 spurte som ville ha stemt på Sp om det var stortingsvalg dagen etter.
- I august 2021 var de tilsvarende tallene 117 av 683.
- La p_1 og p_2 være oppslutningen om Sp i august henholdsvis 2021 og 2022.
- Vi vil først lage et 95% konfidensintervall for $p_1 - p_2$.

Konfidensintervall for $p_1 - p_2$

- Vi antar at $X \sim Bin(m, p_1)$ og $Y \sim Bin(n, p_2)$ er uavhengige.
- Vi ønsker å lage et konfidensintervall for $p_1 - p_2$.
- La $\hat{p}_1 = \frac{X}{m}$ og $\hat{p}_2 = \frac{Y}{n}$, som vi vet er forventningsrette for p_1 og p_2.
- En naturlig estimator for $p_1 - p_2$ er dermed $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$.
- Vi har:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) &= \mathrm{E}(\hat{p}_1) - \mathrm{E}(\hat{p}_2) = p_1 - p_2 \\ \mathrm{V}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) &\overset{uavh.}{=} \mathrm{V}(\hat{p}_1) + (-1)^2\mathrm{V}(\hat{p}_2) = \frac{p_1(1-p_1)}{m} + \frac{p_2(1-p_2)}{n}. \end{aligned}$$

Konfidensintervall for $p_1 - p_2$ (forts.)

- Vi antar at m og n er store nok til at $\hat{p}_1$ og $\hat{p}_2$ tilnærmet normalfordelt.
- Da er også $\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ tilnærmet normalfordelt, slik at

$$\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{m} + \frac{p_2(1-p_2)}{n}}} \overset{\text{tiln.}}{\sim} N(0,1).$$

- Det betyr igjen at

$$\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{m} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n}}} \overset{\text{tiln.}}{\sim} N(0,1).$$

Konfidensintervall for $p_1 - p_2$ (forts.)

- Vi har

$$\mathrm{P}\left(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{m} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n}}} \leq z_{\alpha/2}\right) \approx 1 - \alpha.$$

- Et (tilnærmet) $100 \cdot (1-\alpha)\%$ konfidensintervall for $p_1 - p_2$ er dermed gitt ved

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{m} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n}}$$

Eksempel

Meningsmåling.

Hypotesetest ang. p_1 og p_2

- Vi vil nå teste $H_0 : p_1 \leq p_2$ mot $H_a : p_1 > p_2$.
- Som vanlig holder det å beregne sannsynligheten for type I-feil i nullverdien, dvs. når $p_1 = p_2 = p$.
- En estimator for p er $\hat{p} = \frac{X+Y}{m+n} = \frac{m}{m+n}\hat{p}_1 + \frac{n}{m+n}\hat{p}_2$.
- Da er også $V(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = \frac{p(1-p)}{m} + \frac{p(1-p)}{n} = p(1-p)\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)$.
- Det betyr at

$$\frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}} \overset{tiln.}{\sim} N(0,1).$$

når $p_1 = p_2$.

Hypotesetest ang. p_1 og p_2 (forts.)

- Dermed får vi en test med tilnærmet signifikansnivå α hvis vi forkaster H_0 dersom

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}} \geq z_\alpha.$$

- For tester av $H_0 : p_1 \geq p_2$ mot $H_a : p_1 < p_2$ får vi tilnærmet signifikansnivå α hvis vi forkaster H_0 dersom $Z \leq -z_\alpha$.
- For tester av $H_0 : p_1 = p_2$ mot $H_a : p_1 \neq p_2$ får vi tilnærmet signifikansnivå α hvis vi forkaster H_0 dersom $Z \leq -z_{\alpha/2}$ eller $Z \geq z_{\alpha/2}$.

Eksempel

Meningsmåling.

Styrkefunksjon for hypotesetest ang. p_1 og p_2 (forts.)

- Vi vil nå finne styrkefunksjonen til tester for $H_0 : p_1 \leq p_2$ mot $H_a : p_1 > p_2$.
- La $\bar{p} = \frac{m}{m+n} p_1 + \frac{n}{m+n} p_2 = \mathrm{E}(\hat{p})$
  og $\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \mathrm{sd}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{m} + \frac{p_2(1-p_2)}{n}}$.
- Styrkefunksjonen er da gitt ved:

$$\gamma(p_1, p_2) \approx 1 - \Phi\left(\frac{z_\alpha \sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)} - (p_1 - p_2)}{\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}} \right).$$

- Vi vil bestemme utvalgsstørrelsene m og n, med $m = n$, slik at sannsynligheten for feil av type II blir høyst β for $p_1 = p_1'$ og $p_2 = p_2'$ med $p_1' > p_2'$.

Utledning styrkefunksjon

Vi forkaster altså når

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(1/n + 1/m)}} > z_\alpha$$

Men når $p_2 > p_1$ blir $\mathrm{V}(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) = \frac{p_1(1-p_1)}{m} + \frac{p_2(1-p_2)}{n} = \sigma^2_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}$ og da er det

$$Z' = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}} = Z \frac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})(1/n + 1/m)}}{\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}} - \frac{(p_1 - p_2)}{\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}}$$

som er tilnærmet $\mathrm{N}(0,1)$. Dermed blir sannsynligheten for å forkaste når $p_2 > p_1$ gitt ved $\gamma(p_1, p_2) = \mathrm{P}(Z > z_\alpha \mid p_1, p_2)$

$$= \mathrm{P}(Z' > \left(\frac{z_\alpha \sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)} - (p_1 - p_2)}{\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}} \right))$$

etter at vi har byttet ut leddet $\hat{p}(1-\hat{p})$ med verdien $\bar{p}(1-\bar{p})$.

Hypotesetest ang. p_1 og p_2 (forts.)

- Sannsynligheten for feil av type II er da (med $n = m$)

$$\beta(p_1', p_2') = 1 - \gamma(p_1', p_2') = \Phi\left(\frac{z_\alpha\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})\frac{2}{n}} - (p_1' - p_2')}{\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}}\right)$$

- Vi løser for n når $\beta(p_1', p_2') \leq \beta$, og får

$$n \geq \left(\frac{z_\alpha\sqrt{(p_1' + p_2')\left(1 - \frac{p_1' + p_2'}{2}\right)} + z_\beta\sqrt{p_1'(1-p_1') + p_2'(1-p_2')}}{p_1' - p_2'}\right)^2$$

Merk at $\bar{p} = (p_1' + p_2')/2$ når $n = m$.

Hypotesetest ang. p_1 og p_2 (forts.)

- For tester av $H_0 : p_1 \geq p_2$ mot $H_a : p_1 < p_2$ er styrkefunksjonen

$$\gamma(p_1, p_2) \approx \Phi\left(\frac{-z_\alpha\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)} - (p_1 - p_2)}{\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}}\right),$$

og den $m = n$ som gir sannsynlighet for feil av type II høyst lik β for $p_1 = p_1'$ og $p_2 = p_2'$ med $p_1' < p_2'$ er gitt ved samme formel som over.

- For tester av $H_0 : p_1 = p_2$ mot $H_a : p_1 \neq p_2$ er styrkefunksjonen

$$\begin{aligned}\gamma(p_1, p_2) \approx & 1 - \Phi\left(\frac{z_{\alpha/2}\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)} - (p_1 - p_2)}{\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}}\right) \\ & + \Phi\left(\frac{-z_{\alpha/2}\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)} - (p_1 - p_2)}{\sigma_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}}\right).\end{aligned}$$

Hypotesetest ang. p_1 og p_2 (forts.)

- Den $m = n$ som gir sannsynlighet for feil av type II høyst lik β for $p_1 = p_1'$ og $p_2 = p_2'$ med $p_1' \neq p_2'$ er gitt ved

$$n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2}\sqrt{(p_1' + p_2')\left(1 - \frac{p_1' + p_2'}{2}\right)} + z_{\beta}\sqrt{p_1'(1 - p_1') + p_2'(1 - p_2')}}{p_1' - p_2'} \right)^2$$

Eksempel

Eks. 10.13 i boka.

Ulikhet mellom varianser i to-utvalg, Avsnitt 9.5

- Anta at $X_1, \ldots, X_m \overset{uif}{\sim} N(\mu_1, \sigma_1^2)$ og $Y_1, \ldots, Y_n \overset{uif}{\sim} N(\mu_2, \sigma_2^2)$,
- Sett at vi har ulike prosedyrer avhengig av om $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ eller ikke.
- $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ gir en enklere modell
- Ønsker som regel så enkel modell som mulig
- Fornuftig første strategi: Teste om $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.

Hypotesetest for σ_1^2/σ_2^2

- Vi antar at $X_1, \ldots, X_m \overset{uif}{\sim} N(\mu_1, \sigma_1^2)$ og $Y_1, \ldots, Y_n \overset{uif}{\sim} N(\mu_2, \sigma_2^2)$, der μ_1, μ_2, σ_1 og σ_2 er ukjent.
- Vi vil teste hypotesene $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ mot $H_a : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$.
- Vet at $S_1^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X})^2$ og $S_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2$ er forventningsrette estimatorer for σ_1^2 og σ_2^2.
- Synes rimelig å basere testen på S_1^2/S_2^2
- Videre vet vi at $\frac{(m-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{m-1}$ og $\frac{(n-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2_{n-1}$
- og dessuten at de er uavhengige
- når våre antagelser om normalitet holder

F-fordelingen (Avsnitt 6.3)

- Definisjon: Anta
  - $Y_1 \sim \chi^2_{\nu_1}$
  - $Y_2 \sim \chi^2_{\nu_2}$
  - Y_1 og Y_2 er uavhengige

  Da er $F = \frac{Y_1/\nu_1}{Y_2/\nu_2}$ F-fordelt med (ν_1, ν_2) frihetsgrader

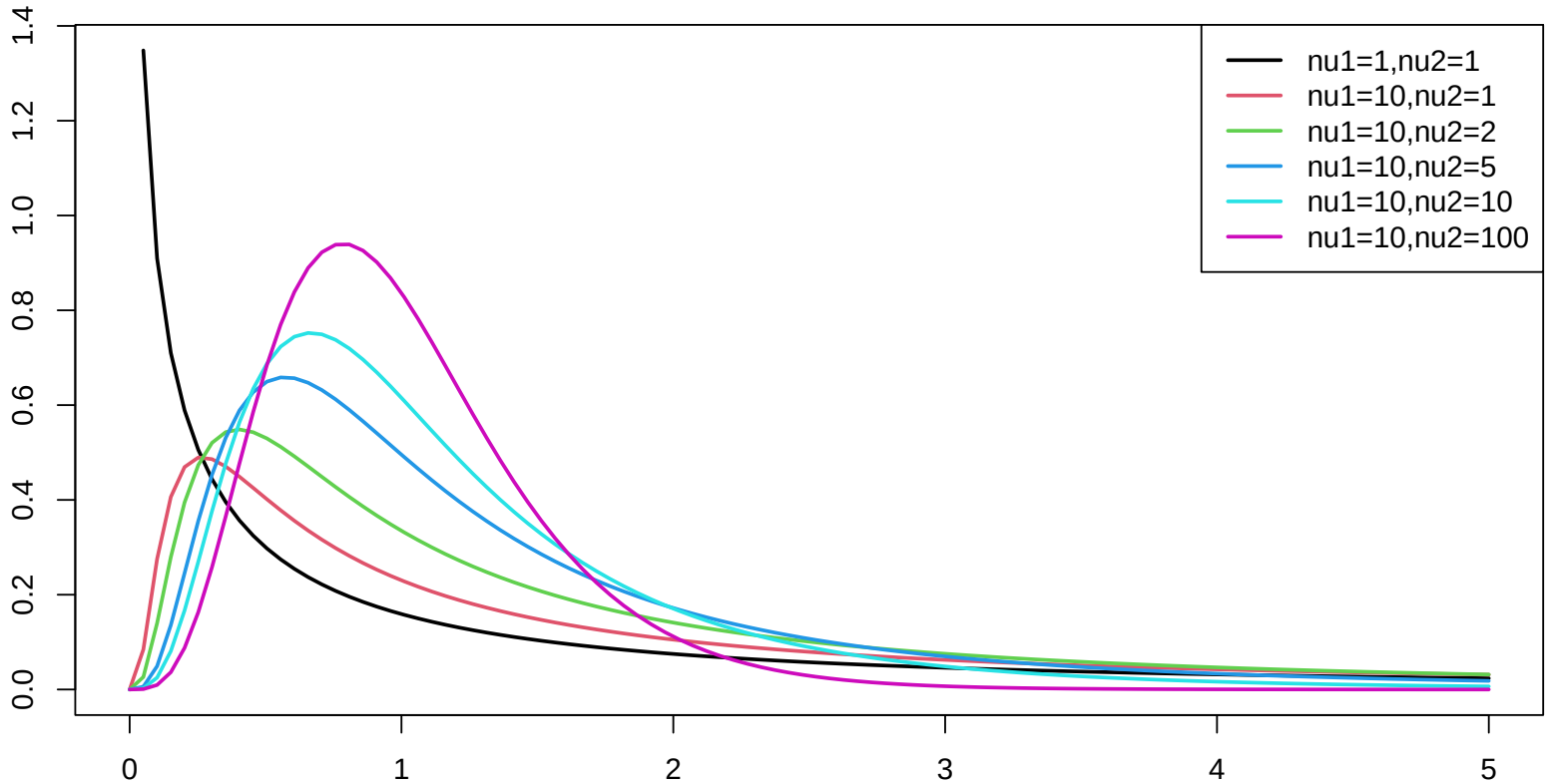
  Vi skriver ofte $F \sim F_{\nu_1,\nu_2}$
- Sannsynlighetstetthet:

$$f(x;\nu_1,\nu_2) = \frac{\Gamma((\nu_1+\nu_2)/2)}{\Gamma(\nu_1/2)\Gamma(\nu_2/2)} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\nu_2/2} \frac{x^{\nu_1/2-1}}{(1+\nu_1 x/\nu_2)^{(\nu_1+\nu_2)/2}}$$

- Momenter:

$$\begin{aligned} E[F] &= \frac{\nu_2}{\nu_2-2}, & \nu_2 > 2 \\ V[F] &= \frac{2\nu_2^2(\nu_1+\nu_2-2)}{\nu_1(\nu_2-2)^2(\nu_2-4)}, & \nu_2 > 4 \end{aligned}$$

Tettheter i noen F-fordelinger

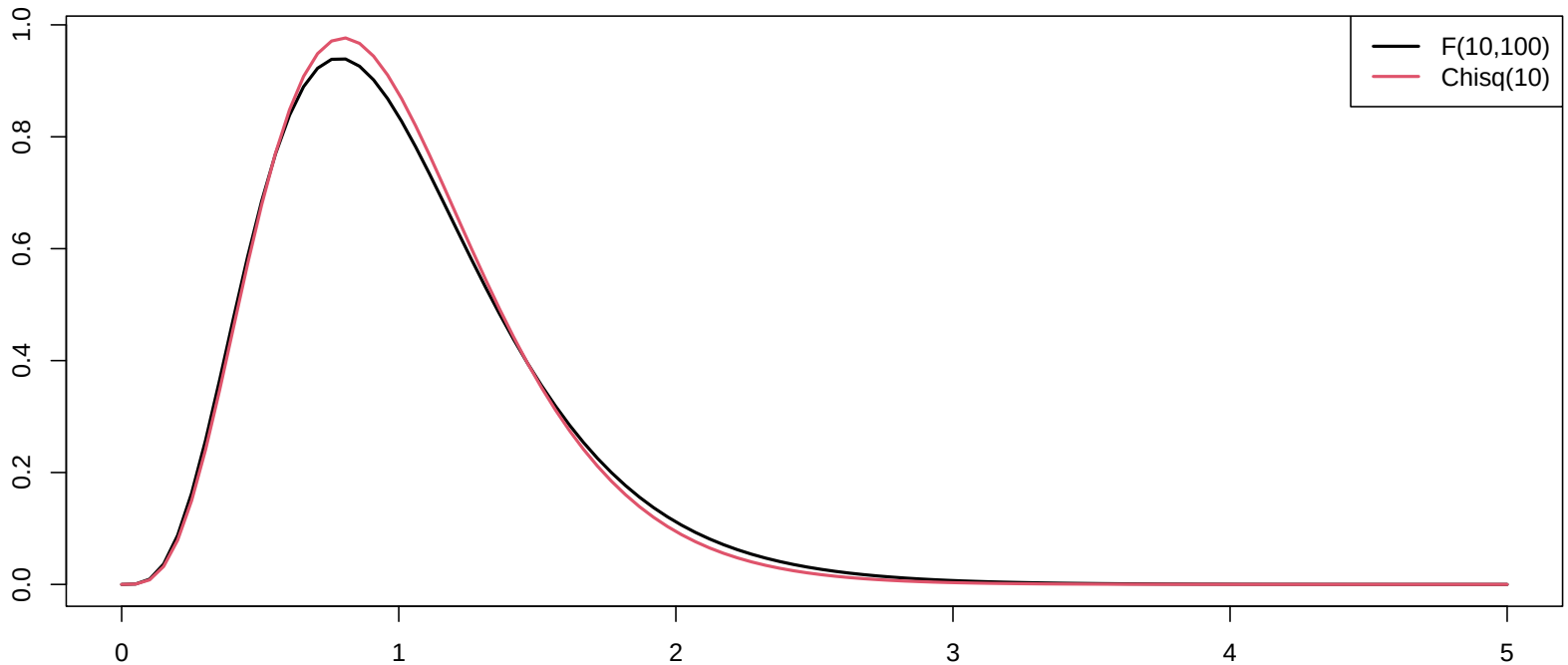


Merk at $E(F) = \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2} \approx 1$ for rimelig stor ν_2 som passer med at F-tetthetene da har senter omkring 1.

F fordeling og χ^2 fordeling

Når ν_2 (i nevneren) er vesentlig større enn ν_1 får vi tilnærmingen $F \sim \chi^2_{\nu_1}/\nu_1$.

Eksempel $\nu_1 = 10$ og $\nu_2 = 100$:



Grunnen er at $\mathrm{V}(Y_2/\nu_2) = \frac{2}{\nu_2}$ som er liten når $Y_2 \sim \chi^2_{\nu_2}$ og ν_2 stor og dermed blir variasjonen i Y_2/ν_2 ubetydelig for F.

Diskusjonsspørsmål

Anta

- $Y_j \sim \chi^2_{\nu_j}, j = 1, 2$
- Y_1 og Y_2 er uavhengige
- $F = \frac{Y_1/\nu_1}{Y_2/\nu_2}$

Spørsmål:

- Hvorfor er ikke $E[F] = \frac{E[Y_1]/\nu_1}{E[Y_2]/\nu_2}$?
  - $E[F] = \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2}$
- Hvorfor er $E[F]$ ikke avhengig av ν_1?
  Hint: Hvis $Y \sim \chi_\nu$ så er $E[Y] = \nu$.
- Hvis ν_2 er stor, hvorfor vil $F \approx \chi^2_{\nu_1}/\nu_1$?
  Hint: $V[Y_2] = 2\nu_2$

$\mathsf{E}(X^r)$ for $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ og $r > -\alpha$ vilkårlig

Momenter $\mathsf{E}(X^r)$ for gammafordelte X kan finnes fra momentgenerende funksjon **når** r positivt heltall.

Vi kan finne momentene mer generelt ved å integrere ut

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(X^r) &= \int_0^\infty x^r f(x;\alpha,\beta)dx = \int_0^\infty x^r \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha}\exp(-\tfrac{x}{\beta})dx \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)}\beta^r \int_0^\infty \frac{x^{\alpha+r-1}}{\Gamma(\alpha+r)\beta^{\alpha+r}}\exp(-\tfrac{x}{\beta})dx \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)}\beta^r \int_0^\infty f(x;\alpha+r,\beta)dx = \frac{\Gamma(\alpha+r)}{\Gamma(\alpha)}\beta^r
\end{aligned}$$

Spesielt for $Y \sim \chi^2_\nu$, dvs. gammafordelt med $\alpha = \nu/2$ og $\beta = 2$ fås

$$\mathsf{E}(\frac{\nu}{Y}) = \mathsf{E}(\nu Y^{-1}) = \frac{\nu}{2}\frac{\Gamma(\alpha-1)}{\Gamma(\alpha)} = \frac{\nu}{2}(\frac{1}{\nu/2-1}) = \frac{\nu}{\nu-2}$$

Sammenheng F fordeling og t fordeling

- t-fordeling: Anta
  - $Z \sim N(0,1)$
  - $Y \sim \chi^2_\nu$
  - Z og Y er uavhengige

  Da er $T = \frac{Z}{\sqrt{Y/\nu}}$ t-fordelt med ν frihetsgrader
- Vi har

$$T^2 = \frac{Z^2}{Y/\nu} = \frac{Z^2/1}{Y/\nu}$$

der $Z^2 \sim \chi^2_1$. Dermed er $T^2 \sim F_{1,\nu}$

Hypotesetest for σ_1^2/σ_2^2

- Vi har $\frac{(m-1)S_1^2}{\sigma_1^2} \sim \chi^2_{m-1}$ og $\frac{(n-1)S_2^2}{\sigma_2^2} \sim \chi^2_{n-1}$ er uavhengige.
- Gir $\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} = \frac{\frac{(m-1)S_1^2}{\sigma_1^2}/(m-1)}{\frac{(n-1)S_2^2}{\sigma_2^2}/(n-1)} \sim F_{m-1,n-1}$.
- Under H_0 er $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, og da er $F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{m-1,n-1}$.
- Da får vi en test med signifikansnivå α dersom vi forkaster H_0 når $F \leq F_{1-\alpha/2,m-1,n-1}$ eller $F \geq F_{\alpha/2,m-1,n-1}$.

Konfidensintervall for σ_1^2/σ_2^2

- For å lage et $100 \cdot (1-\alpha)\%$ konfidensintervall for σ_1^2/σ_2^2 bruker vi at

$$\mathrm{P}\left(F_{1-\alpha/2,m-1,n-1} \leq \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \leq F_{\alpha/2,m-1,n-1}\right) = 1-\alpha$$

som betyr at

$$\mathrm{P}\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2,m-1,n-1}} \geq \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \geq \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2,m-1,n-1}}\right) = 1-\alpha.$$

- Et $100 \cdot (1-\alpha)\%$ konfidensintervall for σ_1^2/σ_2^2 er dermed gitt ved

$$\left(\frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2,m-1,n-1}}, \frac{s_1^2}{s_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2,m-1,n-1}}\right)$$

- Metodene over er nokså følsomme overfor antakelsen om normalfordeling.

Eksempel

Vektøking for rotter.

Kommentarer

- Inferens om varianser er altså sensitivt til normalantagelse
- Resampling er nok det mest direkte alternativet (Avsn. 10.6, ikke pensum)
  - Bootstrapping
  - Permutasjonstesting
  - Også aktuelt for forventninger og andre parametre
- Når vi har diskutert F-tester og F-konfidensintervall for varianser er det mye for å motivere F-fordelingen
- Møter denne igjen alt på torsdag - i forbindelse med Enveis variansanalyse (Kap. 11.1 og deler av 11.3)
- F-tester blir mer generelt benyttet for regresjonsanalyse (Kap. 12, fra uke 42)