Fasit eksamen STK1110 2. desember 2009

Oppgave 1

a). La differansene $D_i = A_i - B_i$ der A_i og B_i er avkastning i måned i for hhv. megler A og megler B, $i = 1, \cdots, 36$. Differansene har forventning μ; $\mu = 0$ betyr at det er ingen forskjell på meglerne, $\mu < 0$ betyr at megler A har mindre avkastning enn megler B, som er det vi vil undersøke om er tilfelle.

Testobservator

$$T = \frac{\bar{D}}{s_D/\sqrt{36}},$$

der s_D er empirisk standardavvik til differansene. $T \sim t$-fordelt med 35 frihetsgrader når H_0 er sann, under antakelse om at D_i-ene er uavhengige og normalfordelte.

b). Finner forkastningsområdet i henhold til $P(\text{forkast} H_0 | H_0 \text{riktig}) \leq 0.01$. Forkast H_0 når observert verdi av T (t) er mindre enn -2.441 ($-t_{0.01,34}$). 35 frihetsgrader er ikke oppgitt i tabellen, bruker 34 for å være garantert at nivået opprettholdes. $t = (-1.1 - 0.95)/(5.89/6) = -2.088$, ingen grunn til å forkaste H_0 på nivå 0.01.

P-verdi= $P(T \leq -2.088)$ når $T \sim t(35)$, fra tabell må denne ligge mellom 0.01 og 0.025 (igjen tabell for 34 frihetsgrader). Ganske liten P-verdi, forkastning på nivå 0.05, ikke på nivå 0.01. Trolig ikke nok til å overbevise i retten, kan ikke utelukke at det er tilfeldig at megler A kommer så dårlig ut i forhold til megler B som han gjør.

c). Starter med at vi vet at $\frac{(n-1)s_D^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$ under antakelsen om normalfordeling.

$$P(\chi^2_{0.975,n-1} < \frac{(n-1)s_D^2}{\sigma^2} < \chi^2_{0.025,n-1}) = 0.95$$

gir etter enkel manipulering

$$P(\sqrt{\frac{(n-1)s_D^2}{\chi^2_{0.025,n-1}}} < \sigma < \sqrt{\frac{(n-1)s_D^2}{\chi^2_{0.975,n-1}}}) = 0.95.$$

Innsatt $n = 36$, $s_D = 5.89$, $\chi^2_{0.025,35} = 53.203$, $\chi^2_{0.975,35} = 20.569$ får vi intervallet (4.78,7.68).

d) Se s. 503-504 i boken. Dersom avkastningene for A og B kan betraktes som to uavhengige utvalg, vil en toutvalgstest gi flere frihetsgrader og lavere β (høyere styrke). Men naturlig å anta at det er en positiv avhengighet i avkastningen hver måned for de to meglerne (pga. markedet de begge opererer i), slik at en toutvalgstest ikke vil være riktig å bruke.

Oppgave 2

a). β_1 er forventet endring i prothorombintid for ett milligram endring i dose (likt for kvinner og menn). β_2 er forventet forskjell i prothrombintid mellom kvinner og menn ved samme dose. Rimelig fra plottet med en linje for kvinner og en for menn, men usikkert om de er parallelle, slik modellen sier de skal være (kan se ut som om kvinnene har høyere stigningstall enn menn).

b). 95% konfidensintervall for β_2:

$$\frac{\hat{\beta}_2 - \beta_2}{s_{\hat{\beta}_2}} \sim t(n-(k+1)),$$

som her blir 20-(2+1)=17 frihetsgrader. Gir intervallet (2.97,4.61) for β_2. Forkaster $H_0 : \beta_2 = 0$ og konkluderer med $H_a : \beta_2 \neq 0$ på nivå .05 fordi 0 ikke ligger inne i intervallet. Generelt gjelder dette for $(1-\alpha)\cdot 100\%$ konfidensintervall og test med tosidig alternativ på nivå α.

c). Residualer $e_i = y_i - \hat{y}_i$, $i = 1, \cdots, 20$, der $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2}$.

Bør nevne forskjellige typer residualplott, og normalfordelingsplott for residualene. Multippel $R^2 =$ [korrelasjonen mellom y_i og $\hat{y}_i]^2$ tolkes som andelen av variasjonen i Y som kan forklares av regresjonsmodellen. 87.3% er rimelig høyt.

d). Ser på forventet prothrombintid for dose x_1,

$$\mu_Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2,$$

og for dose $x_1 + d$,

$$\mu'_Y = \beta_0 + \beta_1(x_1 + d) + \beta_2 x_2.$$

$\mu'_Y - \mu_Y = \beta_1 d$ er endring i forventet prothrombintid når dosen økes med d milligram, ser at denne er uavhengig av kjønn. Innfører interaksjonsledd - ny modell

$$\mu_Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 x_2.$$

Da har vi

$$\mu'_Y = \beta_0 + \beta_1(x_1 + d) + \beta_2 x_2 + \beta_3(x_1 + d)x_2$$

og $\mu'_Y - \mu_Y = \beta_1 d + \beta_3 d x_2$. Det gir endring i forventet prothrombintid på $\beta_1 d$ for menn og $(\beta_1 + \beta_3)d$ for kvinner. Fra plottet ser det rimelig ut med forskjellig stigningstall for kvinner og menn, trolig interaksjon!

Oppgave 3

a). Må gjenkjenne at $X \sim bin(n, p)$. ML:

$$lik(x;p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$loglik(x;p) = log\binom{n}{x} + xlogp + (n-x)log(1-p)$$

$$\frac{\partial loglik(x;p)}{\partial p} = \frac{x}{p} - \frac{(n-x)}{1-p} = 0$$

gir $\hat{p} = X/n$. Ikke påkrevet å vise at annenderiverte er negativ. Alternativ utledning via indikatorvariable, se s. 347 i boken. Moment: $E(X) = np$ settes lik observert verdi, gir også $\hat{p} = X/n$. Også her likestilt å innføre indikatorvariable.

$b)$. $E(\hat{p}) = E(X/n) = E(X)/n = np/n = p$, $V(\hat{p}) = V(X/n) = V(X)/n^2 = np(1-p)/n^2 = p(1-p)/n$.

$$P(|\hat{p} - p| > t) \leq \frac{p(1-p)}{nt^2} \to 0$$

når $n \to \infty$.

$c)$. $\hat{p} \sim N(p, p(1-p)/n)$. Tester $H_0 : p = 0.6$ mot $H_a : p > 0.6$. Velger nivå 0.05. Forkast H_0 når $\hat{p} > k$, $k = 0.6 + 1.645\sqrt{0.6 \cdot 0.4/200} = 0.657$. Observerer $\hat{p} = 122/200 = 0.61$; ingen grunn til å forkaste, vi kan ikke være sikre på at mer enn 60% vil vaksinere seg.

$d)$. Har fra binomisk fordeling at $E(X) = np$ og $V(X) = np(1-p)$. Hvis $\hat{p}$ er ML, er $\hat{\mu} = n\hat{p}$ og $\hat{\sigma}^2 = n\hat{p}(1-\hat{p})$ ML for $E(X)$ og $V(X)$ pga. invarians-egenskapen til ML-estimatorer. Innsatt $\hat{p} = X/n$ i $\hat{\sigma}^2$ får vi

$$E(\hat{\sigma}^2) = E(X) - \frac{1}{n}E(X^2) = E(X) - \frac{1}{n}(V(X) + E(X)^2) = (n-1)p(1-p)$$

som ikke er lik $np(1-p)$. Men ny estimator $\frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2$ vil være forventningsrett.