UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	STK 1130 — Modellering av stokastiske prosesser.
Eksamensdag:	Torsdag 12.08.2004. Kontinuasjons-eksamen.
Tid for eksamen:	9.00 – 12.00.

Oppgavesettet er på 4 sider.

Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Lommekalkulator, Formelsamling for ST 100, Rottmans formelsamling.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

En forhandler av store maskiner har lagerplass til maksimalt M maskiner. Hvis han ved slutten av en måned har m eller færre maskiner på lager, fyller han opp lageret. Men hvis han har flere enn m maskiner på lager, foretar han seg ingenting. Etterspørselen etter maskiner i n-te måned, Y_n, har sannsynlighetsfordeling

$$P(Y_n = k) = a_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

uavhengig av n. Vi antar også at $Y_1, Y_2, \ldots$ er stokastisk uavhengige.

La X_n være antall maskiner på lager ved slutten av n-te måned *før* lageret eventuelt fylles opp, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Hvis etterspørselen n-te måned har vært større enn lagerbeholdningen, dvs. $X_n < 0$, bestiller forhandleren i tillegg til de M maskinene som skal fylle lageret, nok til å tilfredsstille kundene som venter.

(Fortsettes side 2.)

a) Forklar hvorfor

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - Y_{n+1} & \text{hvis } m < X_n \leq M \\ M - Y_{n+1} & \text{hvis } X_n \leq m \end{cases}$$

b) Begrunn at $\{X_n,\ n \geq 0\}$ er en tidshomogen Markovkjede med tilstandsrom $S = \{M, M-1, ..., 1, 0, -1, -2, ...\}$ og overgangssannsynligheter

$$p_{ji} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) = \begin{cases} a_{i-j} & \text{hvis } m < i \leq M \\ a_{M-j} & \text{hvis } i \leq m \end{cases}$$

$i, j \in S$ (vi definerer $a_k = 0$ når $k < 0$).

I resten av Oppgave 1 ser vi på spesialtilfellet $m = 0$, $M = 2$ og

$$P(Y_n = 0) = 0.5 \quad P(Y_n = 1) = 0.4 \quad P(Y_n = 2) = 0.1$$

c) Angi i dette tilfellet S og still opp matrisen med overgangssannsynligheter.

d) Angi Markovkjedens klasse(r) og tilstandenes perioder. Begrunn svaret.

e) Still opp ligninger som entydig bestemmer Markovkjedens stasjonærfordeling.
Verifiser at

$$\pi_2 = \tfrac{25}{90} \quad \pi_1 = \tfrac{40}{90} \quad \pi_0 = \tfrac{21}{90} \quad \pi_{-1} = \tfrac{4}{90}$$

passer i ligningene.

f) Forhandleren ønsker å oppfylle kundenes ønsker så snart de melder seg, i hvor stor del av tiden greier han det (over lang tid) ?

g) Anta at forhandleren ved slutten av en måned ender i tilstand -1, hva er forventet antall måneder til han igjen er i samme tilstand ?

Oppgave 2.

La $X(t)$ være antall begivenheter som inntreffer i tidsrommet $(0, t)$. Vi antar $\{X(t),\ t \geq 0\}$ er en tidskontinuerlig og tidshomogen Markovprosess med diskret tilstandsrom $S = \{0, 1, 2, ...\}$ og $X(0) = 0$. De infinitesimale overgangssannsynlighetene er

$$p_{ji}(\Delta t) = P(X(t+\Delta t) = j | X(t) = i) = \begin{cases} \lambda \Delta t + o(\Delta t) & \text{hvis } j = i + 1 \\ 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t) & \text{hvis } j = i \\ o(\Delta t) & \text{hvis } j > i + 1 \\ 0 & \text{hvis } j < i \end{cases}$$

(Fortsettes side 3.)

Dette er som kjent en Poisson-prosess med parameter λ.

a) Utled at Kolmogorovs forlengsligninger til å bestemme $p_j(t) = P(X(t) = j|X(0) = 0)$, $j \in S$, er

$$\begin{aligned} p_0'(t) &= -\lambda p_0(t) \\ p_j'(t) &= -\lambda p_j(t) + \lambda p_{j-1}(t) \quad , \; j \geq 1 \end{aligned}$$

b) Løs de to første differensialligningene i punkt a).
Vis deretter at

$$p_j(t) = \tfrac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t} \quad , \; j \geq 2$$

passer i ligningssystemet.

c) Utled på bakgrunn av ligningssystemet i a) en differensialligning som $M(t) = E(X(t))$ må tilfredsstille.
Løs ligningen.

La $W_1, W_2, ...$ være tidspunktene når nye begivenheter inntreffer, og la $T_i = W_{i+1} - W_i$, $i = 0, 1, ...$ ($W_0 = 0$) være tiden mellom begivenhetene. Det kan vises at $T_0, T_1, ..$ er uavhengige og identisk fordelte.

d) Utled sannsynlighetsfordelingen for T_0, tiden før den første begivenheten, og finn $\theta = E(T_0)$ uttrykt ved λ.

e) Det er kjent at den betingede simultane sannsynlighetstetthet for $W_1, W_2, \ldots, W_n$ gitt $X(t) = n$ er den samme som den simultane tettheten til ordningsobservatoren for $U_1, U_2, .., U_n$, der U-ene er uavhengige og identisk uniformt fordelt over $(0, t)$.
Finn den betingede kumulative sannsynlighetsfordeling for W_n gitt $X(t) = n$, $n > 0$.
Vis at $E(W_n|X(t) = n) = \frac{n}{n+1} \cdot t$.

Oppgave 3.

Vi betrakter fremdeles Poisson-prosessen med parameter λ, som er gitt i Oppgave 2. For å estimere (eller anslå) parameterverdien θ, forventet tid mellom begivenheter, har en valget mellom to observasjonsmetoder:

I Observer prosessen inntil n begivenheter har inntruffet

II Observer prosessen frem til et gitt tidspunkt t

(Fortsettes side 4.)

Ved begge metoder er beregnet gjennomsnitt av observert tid mellom inntrufne begivenheter en rimelig estimator (anslagsverdi).

a) Ved metode I er estimatoren

$$\tfrac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T_i = \frac{1}{n}W_n \quad \text{(notasjon som i Oppgave 2).}$$

Vis at $E(\tfrac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T_i) = \theta$.

b) Ved metode II er estimatoren

$$\frac{1}{X(t)}\sum_{i=0}^{X(t)-1} T_i = \frac{1}{X(t)}W_{X(t)}$$

hvis $X(t) = 0$ defineres gjennomsnitt lik 0.

Finn $E(\frac{1}{X(t)}\sum_{i=0}^{X(t)-1} T_i | X(t) = n)$ for $n \geq 0$. Gjør rede for hvilke resultat du bruker under beregningen.
Vink: Nytt resultat fra Oppgave 2 e).
Finn så $E(\frac{1}{X(t)}\sum_{i=0}^{X(t)-1} T_i)$.
Sammenlign med θ.

SLUTT