Fasit til ukeoppgaver med gjennomgang 15. februar, samt løsningsforslag på det som ikke ble gjennomgått

Eksamen i ST114 juni 1999

a) 1 klasse som er aperiodisk
b) Tilstanden 0 er rekurrent, de to andre tilstandene er da også rekurrente fordi alle tilstandene er i samme klasse.

c) $\mu_{00} = \frac{13}{2}$

d) $\pi_0 = \frac{2}{13}, \pi_1 = \frac{6}{13}, \pi_2 = \frac{5}{13}$

e) Fant i gjennomgangen at $\mu_{10} = \frac{2}{3} = 1.5$. Finner så μ_{20}:

$$
\begin{aligned}
f_{20}^{(1)} &= \frac{1}{2} \\
f_{20}^{(2n)} &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\right)^{(n-1)} \cdot \frac{2}{3},\ n \geq 1 \\
f_{20}^{(2n+1)} &= 0,\ n \geq 1 \\
\mu_{20} &= \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot f_{20}^{(n)} = 1 \cdot \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} 2n \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{(n-1)} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{(n-1)} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{6}\right)^2} = \frac{73}{50} = 1.46 < \mu_{10}!
\end{aligned}
$$

Eksamen i STK1130 august 2004

c) Tilstandsrom $S = \{2, 1, 0, -1\}$, overgangsmatrise

$$
\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{2,2} & p_{2,1} & p_{2,0} & p_{2,-1} \\ p_{1,2} & p_{1,1} & p_{1,0} & p_{1,-1} \\ p_{0,2} & p_{0,1} & p_{0,0} & p_{0,-1} \\ p_{-1,2} & p_{-1,1} & p_{-1,0} & p_{-1,-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.5 & 0.4 & 0.4 \\ 0.1 & 0.4 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

d) 1 klassse som er aperiodisk

f) I 95.6% av tiden
g) 22.5 måneder

Oppgave 12, Kap. 2

b) Klassen $\{2, 3\}$ er åpen fordi $p_{12} = q > 0$
c) $p_{11}^{(n)} = 1,\ n \geq 1$
d) Den unike stasjonærfordelingen er $\pi_1 = 1, \pi_2 = \pi_3 = 0$

Oppgave 13, Kap. 2

a) Kjeden er irredusibel. Fordi den også er endelig gir Theorem 2.6 (s. 65) oss at den også er positivt rekurrent. Periodisk med periode 2.
b)

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} \Leftrightarrow (\boldsymbol{P} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{0}$$

og

$$\sum_{i=1}^{4} \pi_i = 1$$

gir oss ligningssystemet

$$\begin{aligned}
-\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{1}{2} &= 0 \\
\frac{1}{2}\pi_1 - \pi_2 + \frac{3}{4}\pi_3 &= 0 \\
\frac{3}{4}\pi_2 - \pi_3 + \frac{1}{2}\pi_4 &= 0 \\
\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 &= 1
\end{aligned}$$

som gir at

$$\pi_1 = \pi_4 = \frac{1}{6}$$

$$\pi_2 = \pi_3 = \frac{1}{3}$$