Oppgave 17

(Dette er Oppgave 3 fra Eksamen i ST 114, mai 2003.)

La $X(t)$ være en tidshomogen Markovprosess med kontinuerlig tid, tilstandsrom $S = \{0, 1, \ldots, N\}$ og overgangssannsynligheter

$$p_{ji}(t) = P(X(t+s) = j \mid X(s) = i).$$

La $P(t) = (p_{ji}(t))_{j,i \in S}$ og $P'(t) = (p'_{ji}(t))_{j,i \in S}$.

1. Uttrykk (den infinitesimale) generatormatrisen Q ved $P(t)$. Gi en fortolkning av elementene i Q og angi en sammenheng som elementene må tifredsstille.

2. Utled Kolmogorovs forlengslikninger $P'(t) = QP(t)$ samt baklengslikningene $P'(t) = P(t)Q$.

3. Anta at $X(t)$ har grensefordelingen $\lim_{t\to\infty} p_{ji}(t) = \pi_j > 0$ for $j \in S$. Vis at $p'_{ji}(t) \to 0$ når $t \to \infty$. (Hint: Baklengslikningene.)

   Sett på denne bakgrunn opp et likningssett for å bestemme $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_N$.

4. Anta at
$$Q = \begin{pmatrix} -N & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -N & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -N \end{pmatrix}$$

   Finn $\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_N$ fra likningene i punkt 3.

5. Anta at en prosess $X(t)$ har uniform grensefordeling, dvs. $\pi_0 = \pi_1 = \cdots = \pi_N = \frac{1}{N+1} = \pi$. Finn betingelsene som generatormatrisen til $X(t)$ må tifredsstille.

6. Anta at generatormatrisen Q for en prosess $X(t)$ tilfredsstiller $Q^2 = -\alpha Q$ der $\alpha > 0$. Vis at da blir $P(t) = I + \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})Q$ der I er identitetsmatrisen. (Hint: Ta utgangspunkt i at $P(t) = e^{Qt}$.)

7. Beregn Q^2 for Q i punkt 4. Finn deretter overgangssannsynlighetene $p_{ji}(t)$. Sjekk at $\lim_{t\to\infty} p_{ji}(t)$ stemmer overens med resultatet i punkt 4.