STK1500

Obligatorisk oppgave

Innleveringsfrist

Torsdag 16. APRIL 2026, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Oppgaven blir godkjent dersom man leverer. Med andre ord vil alle som leverer, uavhengig av innhold, få godkjent. Oppgaven er ment som en mulighet til å øve på kunnskapen din. For å legge ut fasit raskt anbefales det derfor å ikke søke om utsettelse med mindre det er strengt nødvendig.

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du legge ved programkoden og levere den sammen med resten av besvarelsen. Det er viktig at programkoden du leverer inneholder et kjøreeksempel, slik at det er lett å se hvilket resultat programmet gir.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) senest samme dag som innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Oppgave 1 (Teori om lån med flytende rente)**.** I denne oppgaven skal vi generalisere annuitetslån til tilfelle med flytende rente. Vi antar at en ny rente publiseres i starten av hver termin. Vi betegner med r_{k-1} renten som publiseres ved starten av termin k, $k = 1, \ldots, K$.

Dette betyr at renten som benyttes til å fastsette terminbeløpet ved låneopptak (tidspunkt $k = 0$) er r_0 som gjelder for hele første termin. Ved tidspunkt $k = 1$ publiseres r_1 som gjelder for hele andre termin og så videre.

Låntaker får utbetalt lånebeløpet L ved tidspunkt $k = 0$ og skal betale første terminbeløp ved starten av andre termin (tidspunkt $k = 1$), det vil si terminbeløpet A_1.

Ved tidspunkt $k = 1$ publiseres renten r_1, og terminbeløpet justeres da til A_2. Dette nye terminbeløpet beregnes ved bruk av renten r_1 og resterende gjeld, under forutsetning av at det da gjenstår $K - 1$ terminer. Tilsvarende justering skjer ved hver senere termin.

(a) Begrunn at terminbeløpene A_k, $k = 1, \ldots, K$, justeres etter den modifiserte annuitetsformelen

$$A_k = \text{Gjeld}_{k-1} \frac{r_{k-1}(1 + r_{k-1})^{K-k+1}}{(1 + r_{k-1})^{K-k+1} - 1}, \qquad k = 1, \ldots, K.$$

der restgjelden utvikler seg etter rekursjonen

$$\text{Gjeld}_k = \text{Gjeld}_{k-1}(1 + r_{k-1}) - A_k, \qquad k = 1, \ldots, K.$$

Ved start, tidspunkt $k = 0$, benytter vi renten r_0 til å fastsette terminbeløpet for hele lånet ved den vanlige annuitetsformelen:

$$A = L \frac{r_0(1 + r_0)^K}{(1 + r_0)^K - 1}.$$

Dette gir det første terminbeløpet, som vi kaller A_1, og som betales ut ved tidspunkt $k = 1$.

Ved tidspunkt $k = 1$ publiseres renten r_1. Etter at terminbeløpet A_1 er betalt, er restgjelden Gjeld_1. Siden det nå gjenstår $K - 1$ terminer, beregnes det nye terminbeløpet A_2 ved annuitetsformelen med

$$L = \text{Gjeld}_1, \quad r = r_1, \quad K = K - 1.$$

Dermed får vi

$$A_2 = \text{Gjeld}_1 \frac{r_1(1 + r_1)^{K-1}}{(1 + r_1)^{K-1} - 1}.$$

Ved tidspunkt $k = 2$ publiseres renten r_2. Etter betaling av A_2 er restgjelden Gjeld_2, og det gjenstår $K - 2$ terminer. Tilsvarende får vi

$$A_3 = \text{Gjeld}_2 \frac{r_2(1+r_2)^{K-2}}{(1+r_2)^{K-2} - 1}.$$

Ved å fortsette denne prosessen ser vi at terminbeløpet ved tidspunkt k er gitt ved

$$A_k = \text{Gjeld}_{k-1} \frac{r_{k-1}(1+r_{k-1})^{K-k+1}}{(1+r_{k-1})^{K-k+1} - 1}, \quad k = 1, \ldots, K.$$

Restgjelden utvikler seg etter rekursjonen

$$\text{Gjeld}_k = \text{Gjeld}_{k-1}(1 + r_{k-1}) - A_k, \quad k = 1, \ldots, K.$$

Dette viser at terminbeløpene følger den oppgitte modifiserte annuitetsformelen.

(b) Bevis at

$$\sum_{k=1}^{K} \text{Renter}_k = -L + \sum_{k=1}^{K} A_k,$$

der

$$\text{Renter}_k = r_{k-1}\text{Gjeld}_{k-1}.$$

Forklar den økonomiske tolkningen av formelen.

Vi tar utgangspunkt i rekursjonen for restgjelden:

$$\text{Gjeld}_k = \text{Gjeld}_{k-1}(1 + r_{k-1}) - A_k, \quad k = 1, \ldots, K.$$

Omskriver vi denne, får vi

$$A_k = \text{Gjeld}_{k-1} r_{k-1} + \text{Gjeld}_{k-1} - \text{Gjeld}_k.$$

Siden $\text{Renter}_k = r_{k-1}\text{Gjeld}_{k-1}$, kan vi skrive

$$A_k = \text{Renter}_k + (\text{Gjeld}_{k-1} - \text{Gjeld}_k).$$

Summerer vi over alle terminer $k = 1, \ldots, K$, får vi

$$\sum_{k=1}^{K} A_k = \sum_{k=1}^{K} \text{Renter}_k + \sum_{k=1}^{K} (\text{Gjeld}_{k-1} - \text{Gjeld}_k).$$

Den siste summen er teleskopisk:

$$\sum_{k=1}^{K}(\text{Gjeld}_{k-1} - \text{Gjeld}_k) = \text{Gjeld}_0 - \text{Gjeld}_K.$$

Siden $\text{Gjeld}_0 = L$ og $\text{Gjeld}_K = 0$, får vi

$$\sum_{k=1}^{K}(\text{Gjeld}_{k-1} - \text{Gjeld}_k) = L.$$

Dermed følger

$$\sum_{k=1}^{K} A_k = \sum_{k=1}^{K} \text{Renter}_k + L,$$

som gir

$$\sum_{k=1}^{K} \text{Renter}_k = -L + \sum_{k=1}^{K} A_k.$$

Formelen sier at de totale rentekostnadene på lånet er lik summen av alle innbetalinger minus det opprinnelige lånebeløpet L.

Dette har en enkel økonomisk tolkning: Hver terminbetaling består av to deler, renter og avdrag. Summen av alle avdragene er nøyaktig lik lånebeløpet L, siden lånet tilbakebetales fullt ut. Resten av det som betales, må derfor være renter. Dermed er totale renter lik totale betalinger minus L.

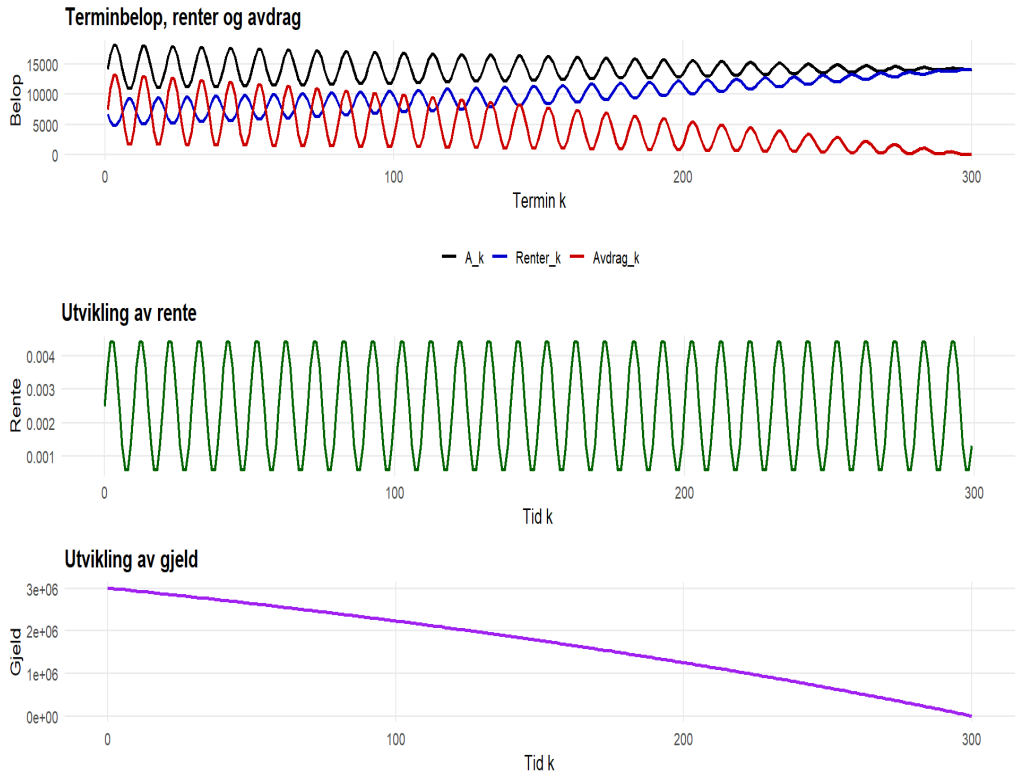
(c) Lag et program med input lånebeløp L, antall terminer K og en vektor med renter

$$r = (r_0, r_1, \ldots, r_{K-1}),$$

som beregner alle terminbeløp A_k, $k = 1, \ldots, K$, restgjeld, renter og avdrag for alle tidspunktene $k = 1, \ldots, K$.

Bruk for eksempel

$$L = 3\,000\,000, \quad K = 300, \quad r_k = 0.0025 + 0.002 \sin\left(\frac{\pi}{5}k\right), \quad k = 0, \ldots, K.$$



Figur 1: Utvikling av terminbeløp A_k, renter og avdrag for et annuitetslån med flytende rente (øverst). Rentedelen avtar over tid som følge av synkende restgjeld, mens avdragsdelen øker. Midtplottet viser den tidsvarierende renten r_k, og nederste plott viser utviklingen i restgjeld, som avtar mot null ved slutten av låneperioden.

```
###############
# Oppgave 1c #
###############

L <- 3000000
K <- 25*12
r <- function(k) 0.0025+0.002*sin((pi/5)*k)

A <- gjeld <- renter <- avdrag <- rep(0,K+1)
gjeld[1] <- L

for(k in 1:K){
```

```
        A[k+1] <- gjeld[k]*(r(k-1)*(1+r(k-1))^(K-k+1))/((1+r
           (k-1))^(K-k+1)-1)
        gjeld[k+1] <- gjeld[k]*(1+r(k-1))-A[k+1]
        renter[k+1] <- r(k-1)*gjeld[k]
        avdrag[k+1] <- gjeld[k]-gjeld[k+1]
}
```

Oppgave 2 (Anvendelse av annuitetslån med flytende rente, inflasjon og boligprisindeks)**.** I denne oppgaven skal vi benytte data fra Norges bank og Statistisk sentralbyrå. Dataene er allerede innhentet og lagret i filen https://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/STK1500/v26/obligatorisk-oppgave/oblig2026.txt.

Vi skal anvende modellen fra forrige oppgave slik banker praktiserer flytende rente. Vi antar at vi tok opp et boliglån 1. januar 2020 med første betaling 1. februar 2020 og siste betaling 1. januar 2026. Dette utgjør 72 terminer.

Vi har hentet månedlige data for styringsrenten fra https://app.norges-bank.no/query/#/no/ (søk på «styringsrente», velg perioden 1. januar 2020–i dag og månedlig frekvens).

Vi konstruerer en forenklet boliglånsrente som

$$\text{boliglånsrente} = \text{styringsrente} + 2\%.$$

Legg merke til at styringsrenten er oppgitt månedlig som en nominell årlig rente. Terminrenten settes derfor lik boliglånsrenten angitt ovenfor, dividert på 12.

Bruk

$$L = 3\,000\,000, \qquad K = 72 \quad (6 \text{ år}),$$

og la terminrenten være gitt slik som beskrevet over.

Før vi løser oppgaven, må vi laste inn nødvendige pakker og lese inn dataene.

```
library(readr)
df <- read_table("oblig2026.txt")
df$dato <- as.Date(paste0(df$dato, "-01"))

K <- nrow(df)-1
r <- df$terminrente
KPI <- df$KPI
BPI <- df$boligprisindeks
```

(a) Beregn terminbeløpene A_k, $k = 1, \ldots, K$, der beløpet hver måned justeres etter gjeldende rente og gjenstående løpetid.

Lag én figur som viser utviklingen i

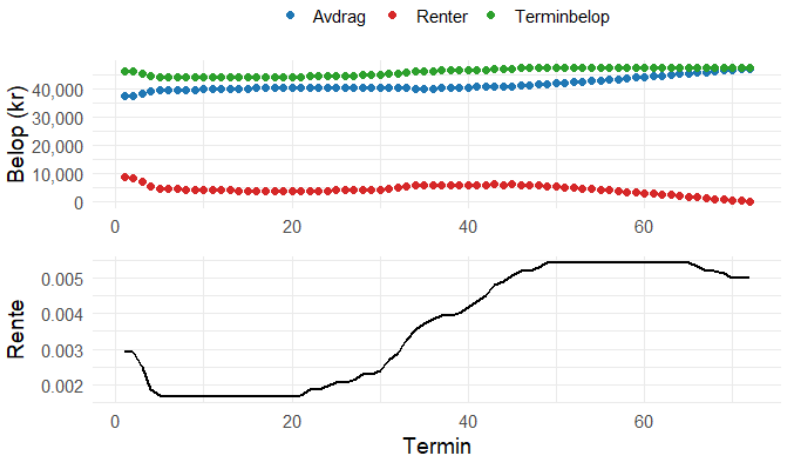
$$A_k, \quad \text{Renter}_k, \quad \text{Avdrag}_k.$$

```
L <- 3000000
A <- avdrag <- renter <- gjeld <- rep(0,K+1)
gjeld[1] <- L

for (k in 1:K) {
      A[k] <- gjeld[k] * r[k] * (1 + r[k])^(K - k + 1) /
      ((1 + r[k])^(K - k + 1) - 1)

      renter[k] <- r[k] * gjeld[k]
      avdrag[k] <- A[k] - renter[k]

      gjeld[k + 1] <- gjeld[k] * (1 + r[k]) - A[k]
}
```



Figur 2: Utvikling av terminbelop, renter og avdrag over K terminer. Terminbelopet deles gradvis i en okende avdragsdel og en avtakende rentedel.

Differansen mellom minimums- og maksimumsbeløp er $47.536,58 - 44.326,23 = 3.210,35$ kroner.

(b) Lag én figur som viser

$$k \mapsto \text{Gjeld}_k, \qquad k \mapsto \sum_{i=1}^{k} \text{Renter}_i.$$

Forklar kort hvordan renteendringer påvirker utviklingen.

Hvor stort tap påføres banken dersom låntaker misligholder lånet 1. april 2022? (Anta at låntaker ikke spøker med banken.)

```
library(ggplot2)
library(tidyr)
library(dplyr)

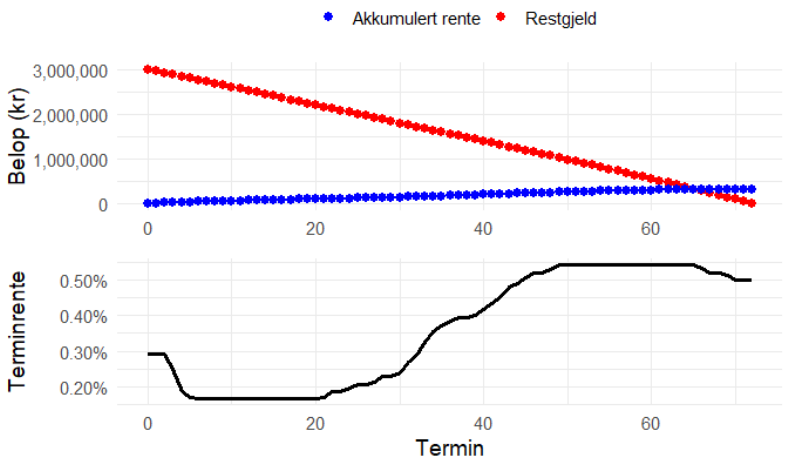
plotdata <- data.frame(
termin = 0:K,
Restgjeld = gjeld,
Akk_renter = c(0, cumsum(renter[1:K])),
Rente = c(r[1], r[1:K])
)

p_top <- ggplot(plotdata, aes(x = termin)) +
geom_point(aes(y = Restgjeld, colour = "Restgjeld"), size
   = 2.5) +
geom_point(aes(y = Akk_renter, colour = "Akkumulert␣rente")
   , size = 2.5) +
scale_color_manual(values = c(
"Restgjeld" = "red",
"Akkumulert␣rente" = "blue"
)) +
scale_y_continuous(labels = comma) +
labs(x = NULL,
y = "Belop␣(kr)",
colour = "") +
theme_minimal(base_size = 14) +
theme(legend.position = "top")

p_bottom <- ggplot(plotdata, aes(x = termin, y = Rente)) +
geom_line(linewidth = 1.2, colour = "black") +
scale_y_continuous(labels = percent_format(accuracy = 0.01)
   ) +
labs(x = "Termin",
```

```
y = "Terminrente") +
theme_minimal(base_size = 14)

p_top / p_bottom
```



Figur 3: Utvikling av restgjeld og innbetalte renter.

Vi ser at rentekurven er brattest rundt terminer 30-50 og dette stemmer med renteøkningen under denne perioden.

1. april 2022 tilsvarer $k = 27$, altså $\text{gjeld}_{27} = 1.922.091$ kroner. Merk at i R-koden tilsvarer dette indeks 28, siden R ikke kan betrakte komponent 0 i en vektor.

(c) Hva er den konstante renten gjennom hele perioden som ville gitt samme renter? Ville det lønnet seg å ta fastrente i starten av lånet på 3%?

Dersom renten er fast, vil terminbeløpet også være fast A. Samlede renter blir da

$$\sum_{k=1}^{K} \text{Renter}_k = -L + AK,$$

Vi vet at $\sum_{k=1}^{K} \text{Renter}_k = 320.042,30$ og at $K = 72$ og $L = 3.000.000$. Da blir

$$A = 46.111,70 \text{ kroner.}$$

Husk at formel med konstantrente er

$$A = L\frac{r(1+r)^K}{(1+r)^K - 1}.$$

Uttrykket over kan ikke løses for r analytisk, så vi løser det numerisk i R ved å sette inn verdiene for A, L og K. Vi får rente $r = 0,002830814$ som tilsvarer en nominell rente på $3,40\%$. Det ville altså lønnet seg å ha en fastrente på 3%. Legg merke at en slik fast rente var sannsynligvis ikke tilgjengelig uansett, ettersom renten 1. januar 2020 var 3,5%.

```
A.fastrente <- (sum(renter)+L)/K

f <- function(r){
      A.fastrente - L * r * (1+r)^K / ((1+r)^K - 1)
}

uniroot(f, c(1e-8, 0.1))$root
```

(d) **(Inflasjonsjustert lån)**

I praksis bør man også ta hensyn til inflasjon (prisvekst). Vi har hentet KPI fra https://www.ssb.no/statbank/table/14700. Vi har valgt månedlige verdier og under vare- og tjenestegruppe velger du "i alt".

KPI-serien inneholder månedlig prosentvis prisvekst. La i_k betegne inflasjonen i termin k, uttrykt i desimalform.

(i) Konstruer først en prisindeks P_k ved å sette

$$P_0 = 1, \qquad P_k = P_{k-1}(1 + i_k), \quad k = 1, \ldots, K.$$

Forklar kort hvorfor prisindeksen må bygges opp multiplikativt over tid.

(ii) Bruk prisindeksen til å beregne følgende reale (inflasjonsjusterte) størrelser målt i kroner ved tidspunkt t_0:

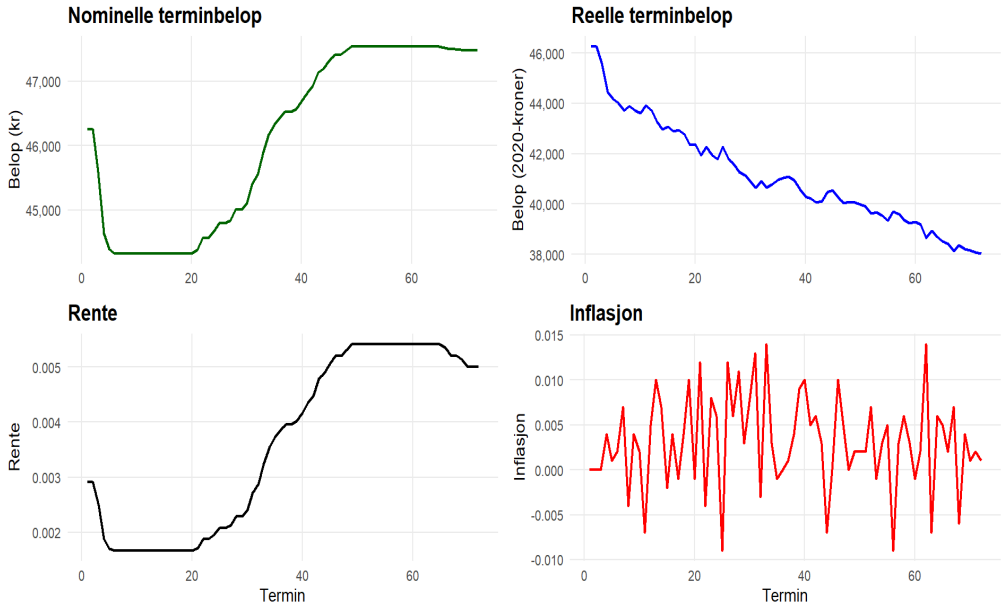
- Reelt terminbeløp:

$$A_k^{\text{real}} = \frac{A_k}{P_k}, \qquad k = 1, \ldots, K.$$

– Reell restgjeld:

$$G_k^{\text{real}} = \frac{G_k}{P_k}, \qquad k = 0, \ldots, K.$$

(iii) Forklar kort hvordan inflasjon påvirker terminbeløp, restgjeld og real verdi av lånet.



Figur 4: Utvikling av nominelle terminbeløp og reelle terminbeløp målt i 2020-kroner med tilsvarende rente- og inflasjonsutvikling.

Tolkning av nominelle og reelle størrelser:

For å analysere hvordan lånet utvikler seg over tid, skiller vi mellom *nominelle* og *reelle* størrelser.

De nominelle terminbeløpene A_k er de faktiske beløpene som betales ved hver termin, målt i kroner. Disse bestemmes bl.a. av gjeldende rente, og vil derfor variere over tid når renten endrer seg. I figuren (øverst til venstre) ser vi at terminbeløpene følger renteutviklingen: når renten øker, øker også terminbeløpet, og motsatt.

For å ta hensyn til inflasjon, konstruerer vi en prisindeks (P_k) ved

$$P_0 = 1, \qquad P_k = P_{k-1}(1 + i_k), \quad k = 1, \ldots, K,$$

der i_k er inflasjonen i termin k. Denne indeksen måler hvordan prisnivået utvikler seg over tid. Siden inflasjon er prosentvis vekst, må prisnivået bygges opp multiplikativt.

Ved å dele de nominelle størrelsene på prisindeksen får vi de reelle (inflasjonsjusterte) størrelsene:

$$A_k^{\text{real}} = \frac{A_k}{P_k}, \qquad G_k^{\text{real}} = \frac{G_k}{P_k}.$$

Disse størrelsene er målt i faste priser (2020-kroner), og gir dermed et uttrykk for kjøpekraften av betalingene.

I figuren (øverst til høyre) ser vi utviklingen i de reelle terminbeløpene. I motsetning til de nominelle beløpene, som er relativt stabile, faller de reelle terminbeløpene over tid. Dette skyldes inflasjon: selv om man betaler omtrent det samme nominelt, er beløpene mindre verdt i kjøpekraft. Med andre ord blir lånet gradvis mindre tyngende i realverdi (og dette er bra!). Se for deg det ekstreme tilfellet der inflasjonen alltid er null. Da vil terminbeløpet ha samme kjøpekraft over tid, og være like "tungt" å betale i 2025 som i 2020.

De nederste plottene viser henholdsvis renteutviklingen og inflasjonen. Renten påvirker de nominelle terminbeløpene direkte, mens inflasjonen påvirker forskjellen mellom nominelle og reelle størrelser. Når inflasjonen er høy, faller realverdien av fremtidige betalinger raskere.

Hovedpoenget illustrert i figuren er dermed at det er viktig å skille mellom nominelle og reelle størrelser. Nominelle beløp gir et bilde av de faktiske betalingene, mens reelle beløp gir et bedre mål på den økonomiske belastningen av lånet over tid. Inflasjon reduserer kjøpekraften av fremtidige betalinger, og gjør dermed gjelden mindre tyngende i realverdi. Nominelle verdier gir for eksempel et bilde av hvor mye av inntekten som går til lånet, men sier lite om hvor "rik" eller "fattig" man er i realøkonomisk forstand.

(e) (Sikkerhet i bolig) Anta at vi kjøpte en bolig for 3 000 000 kr 1. januar 2020, og at lånebeløpet er lik boligprisen (i praksis kan man normalt låne maksimalt 85–90% av boligverdien). Vi har hentet *kvartalsvis* boligprisindeks for brukte boliger for *enebolig* i *Innlandet* på `https://www.ssb.no/statbank/table/07221`.

Dataene gir en prisindeks, altså et indekstall med et basisår. I denne tabellen er basis normalt 2015=100. Det betyr at prisnivået i 2015 settes lik 100; for eksempel betyr 120 at prisnivået er 20% høyere

enn i 2015, mens 90 betyr 10% lavere enn i 2015. Dersom du ønsker prosentvis vekst fra én periode til den neste, kan du bruke

$$\text{vekst}_k = \frac{H_k}{H_{k-1}} - 1,$$

der H_k er indeksnivået i periode k.

La H_{2020K1} være indeksnivået i 1. kvartal 2020. Vi modellerer boligverdien BV_k i kvartal k ved

$$BV_k = 3\,000\,000 \cdot \frac{H_k}{H_{2020K1}}.$$

For eksempel (med $H_{2023K1} = 137{,}1$ og $H_{2020K1} = 117{,}5$):

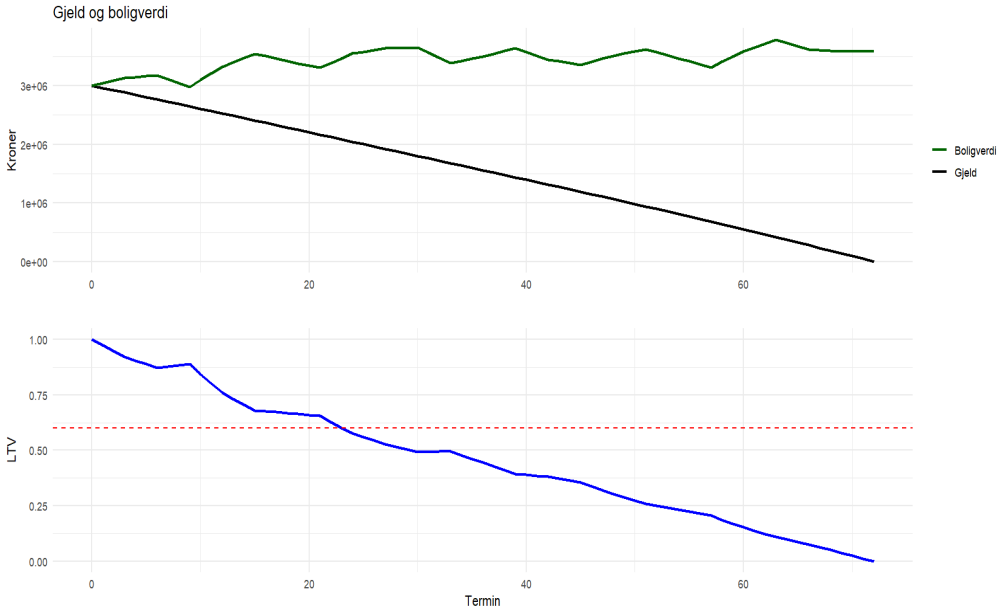
$$BV_{2023K1} = 3\,000\,000 \cdot \frac{H_{2023K1}}{H_{2020K1}} = 3\,000\,000 \cdot \frac{137{,}1}{117{,}5} = 3\,500\,425{,}53.$$

For å konstruere en månedlig serie antar vi at boligprisindeksen utvikler seg lineært innen hvert kvartal. De interpolerte månedlige verdiene er allerede beregnet og ligger i filen *oblig2026.txt*.

Beregn belåningsgraden (Loan-to-Value, LTV) som

$$LTV_k = \frac{\text{Gjeld}_k}{BV_k}, \qquad k = 1, \ldots, K,$$

der BV_k er boligverdien. Forklar hva belåningsgraden forteller oss. Når i løpet av låneperioden bærer låntaker minst risiko?



Figur 5: Utvikling i restgjeld og boligverdi (øverst) samt belåningsgrad (LTV) (nederst) over låneperioden. Belåningsgraden avtar over tid som følge av både nedbetaling av gjeld og utvikling i boligprisene. Den stiplede linjen markerer en vanlig terskel på 60% for opptak av rammelån.

Tolkning av belåningsgrad (LTV)

Vi definerer boligverdien ved hjelp av boligprisindeksen som

$$BV_k = 3\,000\,000 \cdot \frac{H_k}{H_0},$$

der H_k er boligprisindeksen i periode k, og H_0 er indeksen ved kjøpstidspunktet. Dette gir et mål på hvordan verdien av boligen utvikler seg over tid, gitt utviklingen i boligprisene.

Belåningsgraden (Loan-to-Value, LTV) defineres som

$$LTV_k = \frac{G_k}{BV_k},$$

der G_k er restgjelden etter termin k. Belåningsgraden måler hvor stor andel av boligens verdi som er finansiert med gjeld, og er derfor et sentralt mål på risiko både for låntaker og bank.

I figuren ser vi øverst utviklingen i gjeld og boligverdi over tid. Gjelden avtar jevnt som følge av avdragene på lånet, mens boligverdien

følger utviklingen i boligprisindeksen. Når boligprisene øker, stiger boligverdien, noe som bidrar til å redusere belåningsgraden ytterligere.

I det nederste panelet ser vi utviklingen i belåningsgraden. Den starter på 1, siden hele boligkjøpet er finansiert med lån, og avtar deretter over tid. Dette skyldes to mekanismer:

- Restgjelden reduseres gjennom avdrag
- Boligverdien øker når boligprisene stiger

Dermed øker egenkapitalen i boligen gradvis.

Figuren viser også at belåningsgraden etter hvert faller under 0.6. Dette er en viktig terskel i praksis, siden mange banker tillater opptak av rammelån når belåningsgraden er lavere enn 60%. Dette betyr at låntakeren på dette tidspunktet har opparbeidet seg betydelig egenkapital og dermed lavere risiko.

Belåningsgraden gir derfor en klar indikasjon på risiko: høy belåningsgrad innebærer høy risiko, mens lav belåningsgrad innebærer lav risiko. Låntaker bærer størst risiko i starten av låneperioden, når gjelden er høy i forhold til boligverdien, og minst risiko mot slutten, når gjelden er lav og boligverdien relativt høy.

Selv uten nedbetaling av gjeld ville stigende boligpriser isolert sett bidra til å redusere belåningsgraden, dersom den stiger raskere enn rentebyrden, så klart. I praksis virker imidlertid både nedbetaling og prisvekst sammen, og gir en raskere reduksjon i risiko over tid.

R-koden som er brukt:

```
H0 <- df$boligprisindeks[1]
BV <- 3000000 * df$boligprisindeks / H0
LTV <- gjeld / BV
#plot(0:K,LTV)

# Vi kan begynne aa ta opp rammelaan etter termin
min(which(LTV<0.6))
# ca. 2 aar og 1 maaned
library(ggplot2)
library(patchwork)

plotdata <- data.frame(
termin = 0:K,
gjeld = gjeld,
```

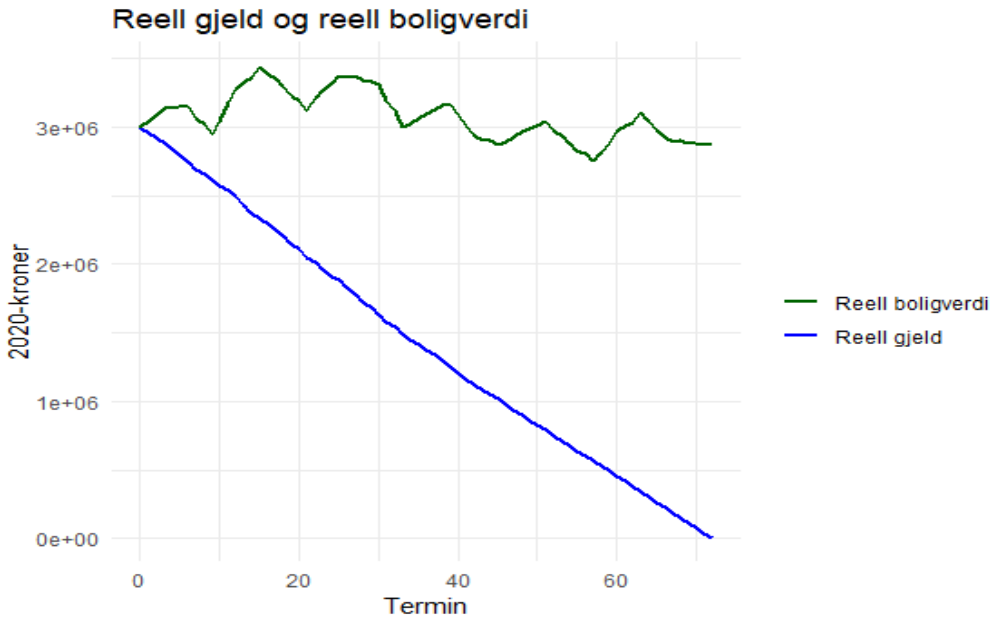
```
boligverdi = BV,
LTV = LTV
)

# Plot 1: Gjeld vs boligverdi
p1 <- ggplot(plotdata, aes(x = termin)) +
geom_line(aes(y = gjeld, colour = "Gjeld"),
   linewidth = 1) +
geom_line(aes(y = boligverdi, colour = "Boligverdi"),
    linewidth = 1) +
scale_color_manual(values = c("Gjeld" = "black", "
   Boligverdi" = "darkgreen")) +
labs(title = "Gjeld og boligverdi",
x = NULL,
y = "Kroner",
colour = "") +
theme_minimal()

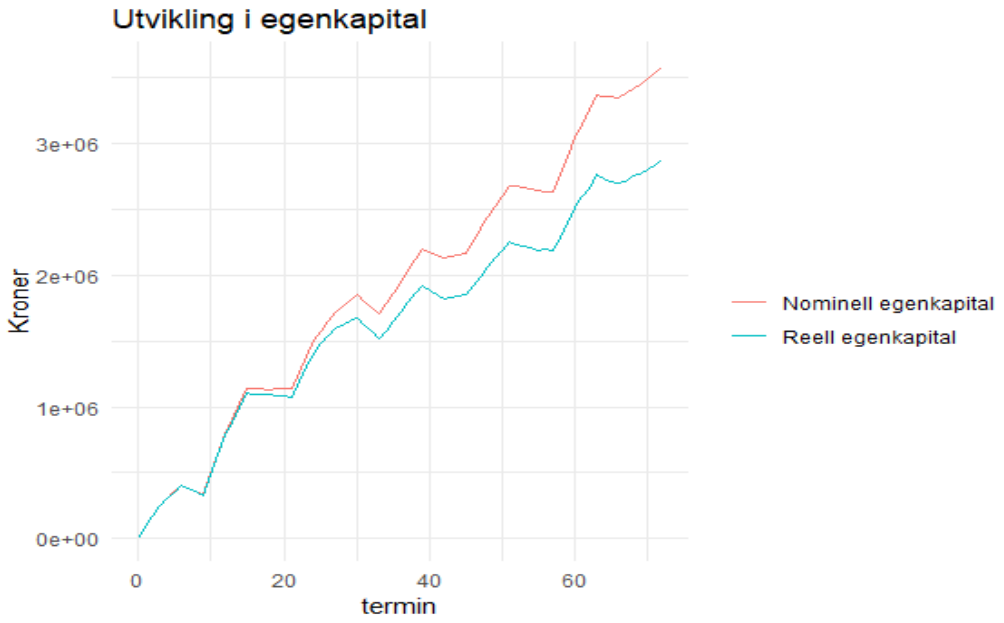
# Plot 2: LTV
p2 <- ggplot(plotdata, aes(x = termin, y = LTV)) +
geom_line(color = "blue", linewidth = 1) +
geom_hline(yintercept = 0.6, linetype = "dashed",
   color = "red") +
labs(title = "Belaaningsgrad (LTV)",
x = "Termin",
y = "LTV") +
theme_minimal()

p1 / p2
```

Ekstra betrakninger:



Figur 6: Utvikling i reell gjeld og reell boligverdi målt i faste priser (2020-kroner). Reell gjeld avtar jevnt som følge av nedbetaling og inflasjon, mens den reelle boligverdien følger utviklingen i boligprisindeksen. Figuren gir et inflasjonsjustert bilde av låntakerens økonomiske situasjon over tid.



Figur 7: Utvikling i nominell og reell egenkapital i boligen. Egenkapitalen øker over tid som følge av både nedbetaling av gjeld og endringer i boligverdien. Den nominelle egenkapitalen vokser raskere enn den reelle, siden inflasjon øker verdien målt i løpende kroner.

For å analysere den økonomiske situasjonen mer fullstendig, kan vi også studere reell gjeld og reell boligverdi, der begge størrelser er målt i faste priser. Dette gir et mer korrekt bilde av låntakerens økonomiske stilling.

Videre kan vi definere egenkapitalen i boligen som forskjellen mellom boligverdi og gjeld. Figuren viser at egenkapitalen øker over tid, både som følge av nedbetaling av gjeld og utvikling i boligprisene. Samtidig ser vi at inflasjon reduserer realverdien av både gjeld og boligverdi, dermed er reell egenkapital en smule lavere.

Det er også verdt å merke seg at belåningsgraden (LTV) er invariant under inflasjonsjustering, siden både gjeld og boligverdi skaleres med samme prisindeks. Dermed reflekterer LTV en reell risikostørrelse uavhengig av inflasjon!

(f) **(Rammelån)** Et rammelån er et fleksibelt boliglån der man kan låne opp til 60 % av boligens verdi og fritt ta ut penger innenfor denne rammen.

Bruk resultatene fra oppgaven til å bestemme når i låneperioden låntaker i prinsippet kan begynne å ta opp et rammelån. Hvor mye lån kan vedkommende ta 1. januar 2024?

Dette er en enkel oppgave gitt resultatene fra oppgave 2(e). Vi ønsker bare å finne det tidligste tidspunktet der

$$LTV_k \leq 0.6.$$

```
k_rammelan <- min(which(LTV <= 0.6))
k_rammelan

# Tilgjengelig ramme 1. januar 2024
# Januar 2020 er k=0, saa januar 2024 tilsvarer k=48
k_2024 <- 48
ledig_ramme_2024 <- 0.6 * BV[k_2024 + 1] - gjeld[k_2024 +
   1]
ledig_ramme_2024
```

som gir 1.042.318 kroner (nominelle).