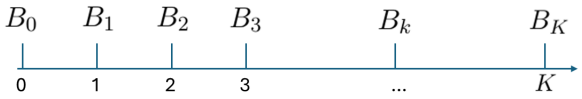
STK1500: Notat 2
Nåverdier og sluttverdier av kontantstrømmer

En kontantstrøm eller betalingsstrøm er en serie av inn- og utbetalinger som skjer på ulike tidspunkter.



Figur 1: Betalingsstrøm illustert på en tidslinje.

Størrelsene B_k, $k = 0, \ldots, K$ kan være negative eller positive.

Nåverdien til B_k er $B_k(1+r)^{-k}$. Dette gjelder for alle $k = 0, \ldots, K$. Nåverdien til B_0 (nå) er selvsagt $B_0(1+r)^{-0} = B_0$.

Vi skal betegne med B en vektor eller rekke med utbetalinger $B = (B_0, B_1, \ldots, B_K)$ eller $B = (B_0, B_1, \ldots, B_K, \ldots)$ dersom betalingsstrømmen er uendelig. Videre skal vi betegne med $V_0(B)$ nåverdien til kontantstrømmen B, der tallet 0 symboliserer nåtiden. Dersom vi skriver $V_n(B)$ for et vilkårlig år n, mener vi verdien av kontantstrømmen i det n-te året.

Nåverdi av en fremtidig betaling

Nåverdien $V_0(B_k)$ av en fremtidig betaling B_k om k år når renten er r per år, er

$$V_0(B_k) = \frac{B_k}{(1+r)^k} = B_k \cdot (1+r)^{-k}.$$

Nåverdi av en kontantstrøm

Nåverdien av en kontantstrøm $B = (B_0, B_1, \ldots, B_K)$ er summen av nåverdiene av de fremtidige betalingene i kontantstrømmen:

$$V_0(B) = B_0 + B_1(1+r)^{-1} + B_2(1+r)^{-2} + \cdots + B_K(1+r)^{-K}.$$

Mer kompakt,

$$V_0(B) = \sum_{k=0}^{K} B_k(1+r)^{-k}.$$

Vi kan argumentere med verdien av kontantstrømmen på slutten av tidslinjen i stedet for ved starten (sluttverdi i stedet for nåverdi).

Sluttverdi av en betaling

Dersom renten er r, er *sluttverdien* $V_K(B_0)$ etter K år av en betaling B_0 som gjøres nå, gitt ved

$$V_K(B_0) = B_0 \cdot (1+r)^K.$$

Sluttverdi av en kontantstrøm

Sluttverdien av en kontantstrøm $B = (B_0, B_1, \ldots, B_K)$ er summen av sluttverdiene til betalingene i kontantstrømmen, gitt ved

$$V_K(B) = B_0(1+r)^K + B_1(1+r)^{K-1} + \cdots + B_{K-1} \cdot (1+r) + B_K.$$

Mer kompakt,

$$V_K(B) = \sum_{k=0}^{K} B_k(1+r)^{K-k} = (1+r)^K \sum_{k=0}^{K} B_k(1+r)^{-k} = (1+r)^K V_0(B).$$

Legg merke til at sluttverdien av hele betalingsrekka B tilsvarer sluttverdien av nåverdien til hele betalingsrekka, slik intuisjon tilsier.

En investering er lønnsom dersom nåverdien til den tilknyttede kontantstrømmen har positiv nåverdi. For eksempel, se for deg at du skal investere 100.000 kr i dag og forventer å få en innbetaling på 25.000 de neste 5 årene. Kontantstrømmen til en slik investering er gitt ved

$$B = (-100.000, 25.000, 25.000, 25.000, 25.000, 25.000).$$

Dersom vi antar en rente på $r = 9\%$ vil vi få at nåverdien er lik

$$\begin{aligned} V_0(B) &= \sum_{k=0}^{5} B_k(1+r)^{-k} \\ &= -100.000 + 25.000\left(1,09^{-1} + 1,09^{-2} + 1,09^{-3} + 1,09^{-4} + 1,09^{-5}\right) \\ &= -2.758,72 \text{ kr.} \end{aligned}$$

Siden verdien er negativ, vil det ikke lønne seg en slik investering dersom vi antar at renten er $r = 9\%$. Hvis renten er, eksempelvis, $r = 3\%$ får vi derimot

$$\begin{aligned} V_0(B) &= \sum_{k=0}^{5} B_k(1+r)^{-k} \\ &= -100.000 + 25.000\left(1,03^{-1} + 1,03^{-2} + 1,03^{-3} + 1,03^{-4} + 1,03^{-5}\right) \\ &= 14.492,68 \text{ kr.} \end{aligned}$$

Denne verdien er positiv, hvilket betyr at en slik investering vil lønne seg dersom renten er $r = 3\%$.

Dette kan tolkes på følgende måte: du har to valg. Enten kjører du på med investeringen eller så setter du inn dine 100.000 kr på en bankkonto med årlig rente r. Hva som lønner seg mest kommer an på nåverdien. Dersom nåverdien til investeringen er negativ, lønner det seg at du bare setter inn investeringskapitalen din på en bankkonto til gitt rente.

Vi kan også finne renten r slik at nåverdien er lik 0. I dette tilfellet (ved hjelp av en datamaskin) får vi at $r \approx 7,93\%$. Dette betyr at investeringen ikke vil lønne seg dersom vi finner en bankkonto som gir oss $7,93\%$ årlig rente eller høyere. Renten slik at en investering har null nåverdi kalles *internrente*.

Internrente

Gitt en investering med inn- og utbetalinger $B = (B_0, \ldots, B_K)$, kaller vi *internrente* den renten r_{int} slik at $V_0(B) = 0$. Dersom vi finner en bankkonto som tilbyr rente $r > r_{\text{int}}$ vil denne bankkontoen være mer lønnsom å benytte enn investeringen B og omvendt, dersom bankkontoen tilbyr rente $r < r_{\text{int}}$, vil investeringen B være mer lønnsom.

Kontinuerlig nå- og sluttverdier

Dersom vi betrakter kontinuerlig forrentning i stedet for vanlig periodisk forrentning, vil alle formelene i dette heftet fortsatt gjelde ved å bytte ut $(1 + r)$ med e^r. Merk at $1 + r < e^r$ for $r > 0$.