Oppgave 1 $P = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0 & 0.7 \end{pmatrix}$

a) Har at $\frac{1}{n} V_i(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} I\{X_k = i\}$ er andelen tid tilstand i, tilstand i for tid n. Teorem 3.8.2 i manus. gir $\frac{1}{n} V_i(n) \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} \frac{1}{m_i}$, som er en skrivemåte for at $P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} V_i(n) = \frac{1}{m_i}\right) = 1$

Vet dessuten at $m_i = 1/\pi_i$, som dermed gir $\frac{1}{n} V_i(n) \xrightarrow{a.s.} \pi_i$, som ble funnet å tilsvare $\pi = (0.2, 0.3, 0.5)$

b) Har at $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} X_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} f(X_i)$ for $f(X_i) = X_i$. Teorem 3.8.2 gir dermed $\overline{X}_n \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} \overline{f} = \sum_{i=1}^{3} \pi_i f_i$

$= 0.2 \cdot 1 + 0.3 \cdot 2 + 0.5 \cdot 3 = 2.3$

Oppgave 2

Se Ex. 3.8.6 i manus.

Oppgave 3 Vet fra tidligere løsning at $\pi = \frac{1}{5}(1, 1, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ Har dessuten $\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_k = \sum_{i=0}^{5} \pi_i i$ som i oppgave 1b hvor grensen er med sannsynlighet 1.

Her benyttes $\mu = \frac{1}{6}\left[1+2+3+4+\frac{5}{2}+\frac{6}{2}\right] = 3.1\overline{2}$

Her $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(X_k-\mu)^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} \overline{f}$

for $f(k) = (k-\mu)^2$ og $\overline{f} = \sum_{i=0}^{5} \pi_i \cdot f_i$

$= 6.991$