# Oppgave 1



La $X_i$ være risikogruppen til en bruker ved år $i$, der

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{lav risiko} \\ 2, & \text{medium risiko} \\ 3, & \text{høy risiko.} \end{cases}$$

a) Har $\mathbb{P}(X_{i+1} = 1 \mid X_{i+1} = 1) =$

$= \mathbb{P}($ ingen ulykker eller 1 $)$

disjunkt $\mathbb{P}($ ingen ulykker $) +$

$\mathbb{P}(1 \text{ ulykke}) = 0.6 + 0.2 = 0.8$

og $\mathbb{P}(X_{i+1} = 2 \mid X_i = 1) =$

$\mathbb{P}($ to ulykker $) = 0.2$

og $\mathbb{P}(X_{i+1} = 3 \mid X_i = 1)$

$= \mathbb{P}($ mer enn 2 ulykker $) = 0.1$

Har $\mathbb{P}(X_{i+1} = 2 \mid X_i = 2) =$

$\mathbb{P}(\text{en ulykke}) = 0.2$

og $\mathbb{P}(X_{i+1} = 1 \mid X_i = 2)$

$= \mathbb{P}(\text{ingen ulykker}) = 0.6$

og $\mathbb{P}(X_{i+1} = 3 \mid X_i = 2)$

$= \mathbb{P}(\text{to ulykker eller mer enn to ulykker})$ disjunkt $\mathbb{P}(\text{to ulykker}) + \mathbb{P}(\text{mer enn to ulykker})$

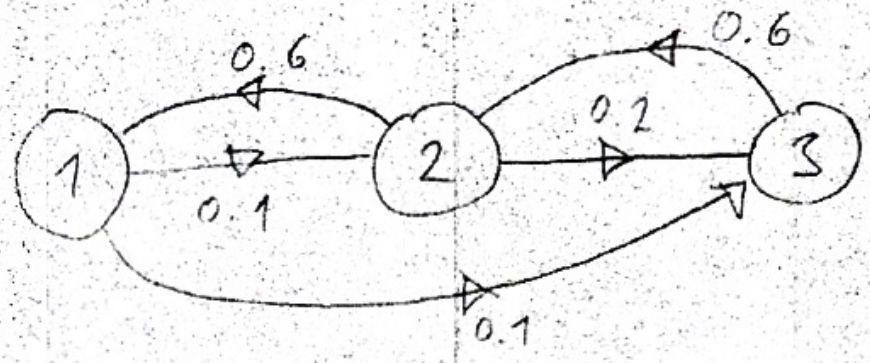
$= 0.1 + 0.1 = 0.2$

Har $\mathbb{P}(X_{i+1} = 2 \mid X_i = 3) =$

$\mathbb{P}(\text{ingen ulykker}) = 0.6$

og $\mathbb{P}(X_{i+1} = 3 \mid X_i = 3)$

$= \mathbb{P}(\text{en, to eller flere ulykker}) = 0.4$




$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

ii) Vil finne $\mathbb{P}(X_6 = 3 \mid X_3 = 1)$ som kan finnes direkte, som ble gjort forrige uke i en liknende oppgave, eller ved hjelp av

Teorem 3.1.5 i manus – som er mye lettere. Har at

$$\mathbb{P}(X_6 = 3 \mid X_3 = 1) \overset{\text{Teorem 3.1.5}}{=} p_{13}^{(3)}$$

for $P^3 = (p_{ij}^{(3)})$.

Finden $P^3$ via R: 4

$$P^3 = \begin{pmatrix} 65.6\% & 18.6\% & 15.8\% \\ 61.2\% & 21.2\% & 17.6\% \\ 50.4\% & 27.6\% & 22.7\% \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow p_{1,3}^{(3)} = 15.8\%$$

# Oppgave 2

La $(X_t)_{t \geq 0}$ være Markov $(\lambda, P)$ med tilstandene $1, \ldots, N$ og

$\lambda = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $P = (p_{ij})$

med $p_{ij} = \begin{cases} \frac{\alpha}{N-1}, & i \neq j \\ 1-\alpha, & i = j \end{cases}$

der $0 \leq \alpha \leq 1$.

i) Hvis $\alpha = 0$: Ingen bevegelse, virusene forblir alltid i sin opprinnelige tilstand. $N$ klasser: $\{1\}, \{2\}, \ldots, \{N\}$ der alle er lukket

Hvis $0 < \alpha \leq 1$: Alle tilstandene kommuniserer med alle tilstandene. En klasse $\{1, 2, \ldots, N\}$ som er lukket

ii) Fra formel i eksempel 3.1.7 [16]

i manus med $\alpha = 0.05$, $N = 10$

blir $\mathbb{P}(X_3 = 1 \mid X_0 = 1)$

$$= \frac{1}{N} + \left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(1 - \frac{\alpha N}{N-1}\right)^3$$

$$= 85.8179\,\%$$

# Oppgave 3

La $\tilde{X}_n = \begin{cases} 0 & , X_n = 1 \\ 1 & , X_n \in \{2, \dots, N\} \end{cases}$

for $n \geq 0$ og $(X_n)$ er kjeden fra forrige oppgave.

c) Hyp: $(\tilde{X}_n)$ er Markov

Bevis Poenget er at når $(X_n)$, den opprinnelige kjeden først har gått veldig fra tilstand 1 (eller hvilken som helst annen tilstand), er det for hver virusgenerasjon like sannsynlig å komme tilbake til utgangspunktet, nemlig

$$\frac{\alpha}{N-1}.$$

La $\lambda = (\mathbb{P}(X_0 = 1), 1 - \mathbb{P}(X_0 = 1))$

og $p_{10} = \frac{\alpha}{N-1}$, $p_{01} = \alpha$,

$p_{11} = 1 - \frac{\alpha}{N-1}$, $p_{00} = 1 - \alpha$.

sannsynligheten for å være et annet sted enn tilstand 1 for så å gå tilbake til tilstand 1

Har $\mathbb{P}(\tilde{X}_0 = i_0) = \lambda_{i_0}$, per def av $\lambda$.

Definer $S: \{0,1\} \to \{\{1\}, \{2,3,\dots,\}\}$ ved

$S(0) = \{1\}$ og $S(1) = \{2,3,\dots,N\}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(\tilde{X}_{n+1} = i_{n+1} \mid \tilde{X}_0 = i_0, \dots, \tilde{X}_n = i_n)$

$= \mathbb{P}(X_{n+1} \in S(i_{n+1}) \mid X_0 \in S(i_0), \dots, X_n \in S(i_n)) = (*)$

OBS: Den opprinnelige kjeden!

Har så at Markov-egenskapen til $(X_n)$ gir at man kan ta vekk alle $X_0 \in S(i_0), \dots, X_{n-1} \in S(i_{n-1})$

og få $(*) = \mathbb{P}(X_{n+1} \in S(i_{n+1}) \mid X_n \in S(i_n)) = p_{i_n, i_{n+1}}$

hvor siste likhet (dvs denne) kommer fra den første bemerkningen at det alltid er like sannsynlig å gå tilbake til utgangspunktet.

Selve overføringen av Markov-egenskapen som gav den første likheten på denne siden kommer fra

- Teorem 3.1.4 i manus

$$\mathbb{P}(X_{n+1} \in S(i_{n+1}) \mid X_0 \in S(i_0), \dots, X_n \in S(i_n)) \overset{\text{Def}}{=} \mathbb{P}(X_{n+1} \in S(i_{n+1}), X_n \in S(i_n), \dots, X_0 \in S(i_0)) / \mathbb{P}(X_0 \in S(i_0), \dots, X_n \in S(i_n))$$

$$= \mathbb{P}(X_n \in S(i_n))$$

$$\cdot \mathbb{P}(X_{n+1} \in S(i_{n+1}), \ldots, X_0 \in S(i_0) \mid X_n \in S(i_n)) / \mathbb{P}(X_0 \in S(i_0), \ldots, X_n \in S(i_n)) = (**).$$

$P(A \cap B) = P(A \cap B \cap A) = P(A) P(A \cap B \mid A)$

- Hvis så $S(i_{n+1}) = 1 = S(i_n)$

følger konklusjonen av Teorem 3.1.5

i mønus: $(**) = \mathbb{P}(X_n = 1)$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1, X_n = 1, X_{n-1} \in S(i_{n-1}), \ldots, X_0 \in S(i_0) \mid X_n = 1) / \mathbb{P}(X_0 \in S(i_0), \ldots, X_n = 1)$$

Thm 3.1.4 $\mathbb{P}(X_n = 1) \, \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 1)$

$$\mathbb{P}(X_0 \in S(i_0), \ldots, X_n = 1 \mid X_n = 1) / \mathbb{P}(X_0 \in S(i_0), \ldots, X_n = 1)$$

$= \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 1)$

med $A = \{X_0 \in S(i_0), \ldots, X_n = 1\}$

For de andre to mulighetene må man bruke Teorem 3.1.4 flere ganger, og det blir litt mer grisete. 11

ii) For $N = 20$, $\alpha = 0.05$ og $n = 100$ gir formelen i Eksempel 3.1.7 i manus at

$$\mathbb{P}(X_{100} = 1 \mid X_0 = 1) \approx 5.42\,\%.$$