Oppgave 1 La $S_n \in \{0\$, 1\$, 2\$\}$ være en Markovkjede med overgangsmatrise

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.05 & 0.6 & 0.35 \end{pmatrix}.$$ Vil finne k_i

$= \mathbb{E}_i \inf\{n \geq 0 : S_n = 0\}$. Har $k_0 = 0$,

$k_1 = 1 + 0.1\, k_0 + 0.6\, k_1 + 0.3\, k_2 = 1 + 0.6 k_1$

$+ 0.3 k_2 \Rightarrow k_1 (1 - 0.6) = 1 + 0.3 k_2$

$\Rightarrow k_1 = \frac{1 + 0.3 k_2}{0.4}$. Har også k_2

$= 1 + 0.05\, k_0 + 0.6\, k_1 + 0.35 k_2$

$= 1 + \frac{0.6}{0.4}(1 + 0.3 k_2) + 0.35 k_2$

$= 2.5 + 0.8 k_2 \Rightarrow (1 - 0.8) k_2 = 2.5$

$\Rightarrow k_2 = \frac{2.5}{0.2} = 12.5 \Rightarrow k_1 = \frac{1 + 0.3 \cdot 12.5}{0.4}$

$= 11.875.$

Oppgave 2 La $S_n \in \{0\$, 1\$, 2\$, 3\$\}$ $\boxed{2}$ være en Markovkjede med overgangsmatrise

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.4 & 0.4 & 0.1 \\ 0.05 & 0.5 & 0.35 & 0.1 \\ 0.01 & 0.6 & 0.3 & 0.09 \end{pmatrix}$$

i) La $T := H^A := \inf\{n \geq 0 : S_n \in A\}$ for $A = \{2,3\}$ og $\tilde{\mathbb{P}}(B) := \mathbb{P}(B \mid T < \infty, S_T = 2)$ for en hendelse $B \subseteq \Omega$.

Har $\mathbb{P}(S_{T+2} = 3 \mid T < \infty, S_T = 2)$

$= \tilde{\mathbb{P}}(S_{T+2} = 3) \overset{\text{Stark Markov}}{=} \mathbb{P}(S_2 = 3 \mid S_0 = 2) \overset{\text{Teorem 3.1.5}}{=} p_{23}^{(2)}$ der $(p_{ij}^{(n)}) := P^n$. Lar R regne ut P^2 og P^3 (for neste deloppgave.) Finner $p_{23}^{(2)} =$ ~~xxxx~~ 9.4%. og $p_{23}^{(3)} =$ ~~xxxxxx~~ 8.72%.

Oppgave 3 Vet fra løsningen av L3 oppgave 1 i det tredje oppgavesettet at kjedens overgangsmatrise er

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Vil finne k_0, der

$$k_i = \mathbb{E}_i \inf\{n \geq 0 : X_n \in A\}$$

for $A = \{2, 3\}$ Har

$$k_2 = k_3 = 0 \text{ og}$$

$$k_1 = 1 + 0.8 k_1 + 0.1 k_2 + 0.1 k_3$$

$$= 1 + 0.8 k_1 \Rightarrow k_1 = \frac{1}{1-0.8} = \frac{1}{0.2}$$

$$= \left(\frac{2}{10}\right)^{-1} = \frac{10}{2} = 5$$

Kan også sees ved å se at første avgang fra tilstand 1 er geometrisk fordelt med suksessannsynlighet $0.2 \Rightarrow \mathbb{E}X = \frac{1}{0.2} = 5$

Oppgave 4 Bruker Teorem 3.4.6 L4

i manus: Har $\mathbb{P}_0(T_0 < \infty) = 1$ fra at $\mathbb{P}_0(T_0 = 1) = 1$ siden $p_{01} = \delta_{01}$. $\Rightarrow$ Tilstand 0 er rekurrent. Alternativ løsning:

La $A =$ "$\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1$"

og $B =$ "$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$"

Merk at $\sim A =$ "$\mathbb{P}_i(T_i < \infty) < 1$"

siden sannsynligheter er mellom 0 og 1, og at

$\sim B =$ "$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$".

- Betyr "det logisk motsatte av A"

Teorem 3.4.6 sier at

$A \Rightarrow B$ og $\sim A \Rightarrow \sim B$.

Men kan at $\sim A \Rightarrow \sim B$ er det samme som $B \Rightarrow A$.

Dette kan sees ved hjelp av

Følgende sannhetstabell:

A	B	$B \Rightarrow A$	$\sim A$	$\sim B$	$\sim A \Rightarrow \sim B$
1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

Altså sier Teorem 1.5.3 at

$$P_i(T_i < \infty) = 1 \iff \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty.$$

For oss er $p_{00}^{(n)}$ lett å finne, siden den er 1:

$$p_{00}^{(n)} \overset{\text{Teorem 3.1.5}}{=\!=} \sum_{i_1 \in S} \cdots \sum_{i_{n-1} \in S} p_{0i_1} \cdots p_{i_{n-1}0}$$

$$= \sum_{i_1 \in S} \cdots \sum_{i_{n-1} \in S} \delta_{0i_1} \delta_{0i_2} \cdots \delta_{i_{n-1}0} = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(n)} = \infty \Rightarrow P_0(T_0 < \infty) = 1.$$