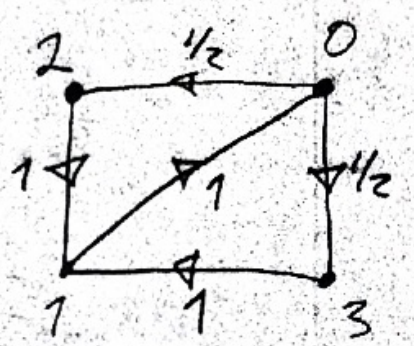
**Oppgave 1** Anta $(X_n)_{n\geq 0}$ er Markov

- med overgangsmatrise

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$




Kjeden er irreducibel (dvs det er bare én klasse.)

**Løsning 1:**
Siden kjeden er endelig og har bare en klasse må denne klassen være lukket

Rem. 3.4.6(ii) og Th. 3.4.4 i Mandus medfører dermed at alle tilstandene er rekurrente

**Løsning 2:** Siden kjeden er irreducibel, holder det å undersøke rekurrens-egenskapene til én tilstand.
Kjedens struktur gjør at man lett kan regne ut $p_{ii}^{(n)}$ for alle $i = 0, 1, 2, 3$. La oss se på $i = 1$.

Vi vil altså bruke Teorem 3.4.6 for å vise $\sum_{n=0}^{\infty} p_{11}^{(n)} = \infty$.

Merk at $p_{11}^{(2n+1)} = 1$, man kommer alltid tilbake til tilstand 1 ellers et oddetalls antall steg. Har også $p_{11}^{(2n)} = 0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{11}^{(n)}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} p_{11}^{(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} n = \infty$.

Løsning 3: Har $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

og $P^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow P^n = P^{n \bmod 4}$, der

$n \bmod m$ er resten av $\frac{n}{m}$. Ser at alle diagonalelementene til $P^3$ er $\geq 1/2$.

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} \geq \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(3n)}$$

$$\geq \lim_{n\to\infty} n/2 = \infty$$

$\Rightarrow$ Alle tilstandene er tilbakevendte.

**Oppgave 2** La $(S_n)_{n\geq 0}$ være Markov $(S_1, P)$, der $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.05 & 0.6 & 0.35 \end{pmatrix}$

Vil finne $P_i(S_i^{(r)} \leq 2 \mid T_i^{(r-1)} < \infty)$, for $i = 1$ og $r \geq 1$. Har $S_n \in \{0,1,2\}$

**Vi har:**

$$P_1(S_1^{(r)} \leq 2 \mid T_1^{(r-1)} < \infty)$$

$$= P_1(S_1^{(r)} \leq 2 \mid T_1^{(r-1)} < \infty,$$

$$X_{T_1} = 1) = P(S_1^{(r)} \leq 2 \mid$$

$$T_1^{(r-1)} < \infty, X_T = 1)$$

$$= P(S_1^{(r)} \leq 2 \mid T_1^{(r-1)} < \infty) =$$

$$\sum_{n=1}^{2} P(S_1^{(r)} = 2 \mid T_1^{(r-1)} < \infty)$$

$T_1^{(r-1)}$ er første tilbakekomst til 1, så her må $X_{T_1} = 1$

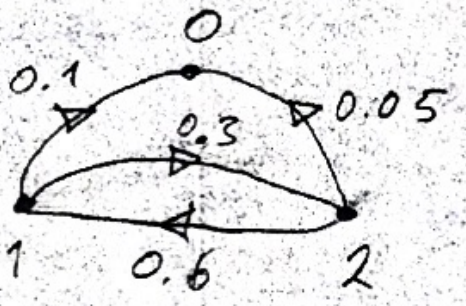
Teorem 3.3.3 i manus gir at hvordan oppførsel etter $T_1$ er uavhengig av fortiden.

Lemma 3.4.3

$$\sum_{k=1}^{2} P_1(T_1 = k)$$



$$= P_1(T_1 = 1) + P_1(T_1 = 2).$$




$$= P_1(X_1 = 1) + P_1(X_1 \neq 1, X_2 = 1) = 0.6 + P_1(X_1 = 2, X_2 = 1)$$

Teorem 3.1.3 (manus

$$0.6 + 0.3 \cdot 0.6 =$$

$$= 78\,\%.$$

Siden hvis man først - treffer 0 1, kommer man aldri vekk

**Oppgave 3** La $(Y_n)_{n\geq 0}$ være Markov

med tilstandsrom $I = \{0, 1\}$ og

overgangsmatrise $P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \frac{\alpha}{N-1} & 1-\frac{\alpha}{N-1} \end{pmatrix}$

Eksempel 3.1.6 i manus gir

$$p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{N} + \left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{\alpha N}{N-1}\right)^n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty, \text{ så begge}$$

tilstandene er rekurrente

**Oppgave 4** Har $P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$ [6]

Har $\mathbb{E}[S_1^{(r)} \mid T_1^{(r-1)} < \infty]$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n \, \mathbb{P}(S_1^{(r)} = n \mid T_1^{(r-1)} < \infty)$$

$$\overset{\text{Lemma 3.4.3}}{=} \sum_{n=1}^{\infty} n \, \mathbb{P}_i(T_1 = n) \overset{\text{Antar } X_0 = 1}{=}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \, \mathbb{P}(T_1 = n) = \mathbb{E}[T_1].$$

1.1

Har $\mathbb{E} T_1 \overset{\text{Dobbel forventning}}{=} \mathbb{E}\,\mathbb{E}[T_1 \mid X_1]$.

Har $\mathbb{E}[T_1 \mid X_1 = 1] = 1$. La $i \in \{2, 3\}$

Har $\mathbb{E}[T_1 \mid X_1 = i]$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}(T_1 = n \mid X_1 = i)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n \, \mathbb{P}(\{\inf\{m \geq 1 : X_m = 1\} = n\}$$

$$\cap \{X_1 = i\}) / \mathbb{P}(X_1 = i)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}(\{1 + \inf\{m \geq 1 : X_m = 1\} \text{ [7}$$

$$= n\} \cap \{X_1 = i\}) / \mathbb{P}(X_1 = i)$$

når $X_1 = i \neq 1$ må $T_1 \geq 2$!

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbb{P}(\inf\{m \geq 1 : X_m = 1\}$$

$$= n-1 \mid X_1 = i)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [(n-1)+1] \mathbb{P}(\inf\{m \geq 1 : X_m = 1\}$$

$$= n-1 \mid X_1 = i) \overset{\text{Markov egenskap}}{=} \mathbb{E}_i H^{\{1\}}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}_i(H^{\{1\}} = n) = 1 + \mathbb{E}_i H^{\{1\}}$$

der $H^{\{1\}} = \inf\{n \geq 0 : X_n \in \{1\}\}$.

Kan dermed bruke Teorem 3.2.6 i manus: La $k_i = \mathbb{E}_i H^{\{1\}}$.

Har $k_2 = 1 + 0.2 k_2 + 0.2 k_3$

$\Rightarrow (1 - 0.2) k_2 = 1 + 0.2 k_3$

$\Rightarrow k_2 = \frac{1}{0.8} + \frac{0.2}{0.8} k_3 = 1.25 + 0.25 k_3$. Og $k_3 = 1 + 0.6 k_2 + 0.4 k_3 = 1 + 0.6(1.25 + 0.25 k_3) + 0.4 k_3$

$$= 1.75 + 0.55 k_3$$

$$\Rightarrow (1 - 0.55) k_3 = 1.75$$

$$\Rightarrow k_3 = 35/9 \approx 3.8$$

og dermed $k_2 = 1.25 + \frac{1}{4}\frac{35}{9}$

$$= \frac{5 \cdot 9 + 35}{36} = \frac{20}{9} \approx 2.22$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}T_1 = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{E}[T_1 | X_1 = i] p_{1i}$$

$$= 1 \cdot p_{11} + (1 + \frac{20}{9}) p_{12}$$

$$+ (1 + \frac{35}{9}) p_{13}$$

$$= 1 \cdot 0.8 + (1 + \frac{20}{9}) 0.1 + (1 + \frac{35}{9}) 0.1$$

$$= \frac{29}{18} \approx 1.6$$