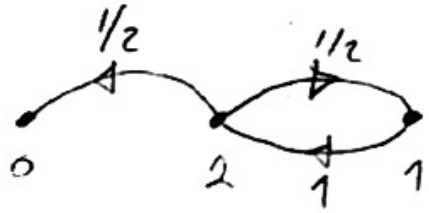
Oppgave 1

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$



To klasser: $\{0\}$ og $\{1,2\}$

$\Rightarrow P_1$ ikke irreduserbel $\{0\}$ tilstand $\Rightarrow$

$\{0\}$ returnert fra at kjeden er endelig.

$\{1,2\}$ åpen $\Rightarrow \{1,2\}$ transient, siden det er positiv sannsynlighet for å dra til $\{0\}$ og aldri komme tilbake.

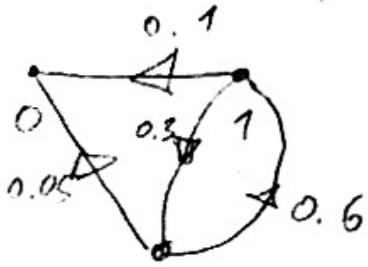
$$P_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



To klasser $\{0,1\}$ og $\{2,3\}$

$\Rightarrow P_2$ er ikke irreduserbel. Begge klassene er tilstander, og begge er transiente fra at P_2 er endelige.

Oppgave 2 $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.05 & 0.6 & 0.35 \end{pmatrix}$ 12



To klasser $\{0\}$ og $\{1,2\}$.

$\Rightarrow$ P er ikke irreducibel

kan derfor ikke bruke teoremene fra seksjon 3.5, men se direkte på def av invariant

$$\gamma P = \gamma \Rightarrow P^T \gamma^T = \gamma^T$$

$\Rightarrow (P^T - I)\gamma^T = 0$, som på matriseform er

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0.05 \\ 0 & -0.4 & 0.6 \\ 0 & 0.3 & -0.65 \end{pmatrix}$$

$R_2 + (R_1 + R_2) \to R_2$

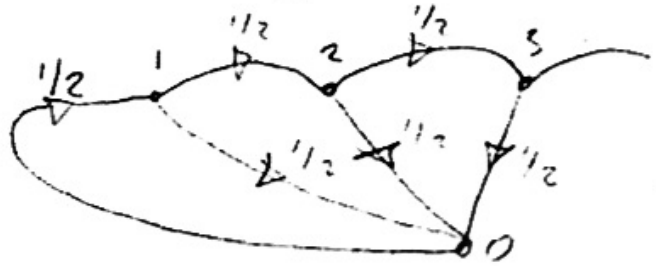
$$\begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0.05 \\ 0 & 0.3 & -0.65 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow 0.1\gamma_1 = -0.05\gamma_2 \Rightarrow \gamma_1 = -0.5\gamma_2$

og $0.3\gamma_1 = -0.65\gamma_2$ Motsetning med mindre $0 = \gamma_2 = \gamma_1$. γ_0 er derimot helt fri; $\gamma = (\gamma_0, 0, 0)$ er en stasjonærfordeling for $\gamma_0 = 1$.

2 ii) Siden $p_{ii}^{(2n+1)} = 0$ for $n \in \mathbb{N}$ og $i \in \{2, 3\}$ er $\{2\}$ og $\{3\}$ aperiodiske. Har dessuten $p_{ii}^{(n)} = 1$, så $\{1\}$ er periodisk.

Oppgave 5 La X_n telle antall suksesser på et Bernoulli-eksperiment med $p = 1/2$, der X_n blir 0 når man får en feil.



$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 \; 1/2 \end{pmatrix}$$

P er altså 1/2 i hele den første kolonnen, samt på superdiagonalen

Har dessuten at alle tilstandene kommuniserer med alle andre, så P er irreduserbel.

$\pi P = \pi$ med $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$:

Hom $(P^T - I)\pi^T = 0$, dvs $P^T - I$

$$= \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1 \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\pi_0 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} \pi_i \Rightarrow \pi_0 = \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i$$

$$= -\pi_0 + \pi_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i = -\pi_0 + \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1 - \pi_0$$

$$\Rightarrow \pi_0 + \pi_0 = 1 \Rightarrow \pi_0 = 1/2$$

dvs $1/2\,\pi_0 = \pi_1 \Rightarrow \pi_1 = 1/4 = \frac{1}{2^2}$

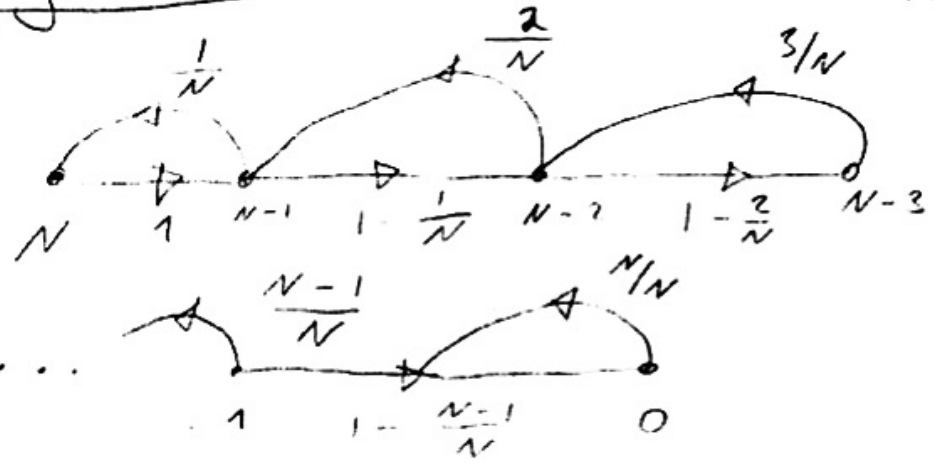
$1/2\,\pi_1 = \pi_2 \Rightarrow \pi_2 = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2^{2+1}} = 2^{-(2+1)}$

$\Rightarrow \Rightarrow \pi_i = 2^{-(i+1)}$ för $i > 0$,

som också passar för $i = 0$

$\Rightarrow \pi_i = 2^{-(i+1)}$.

Oppgave 4 Her $\lambda = \delta_N$.



Så $p_{ij} = \left(1 - \frac{N-j}{N}\right) \mathbb{I}\{j = i+1\}$

$$+ \frac{N-j}{N} \mathbb{I}\{j = i-1\}$$

som med "dell forskrift" kan skrives som:

$$p_{ij} = \begin{cases} j/N, & j = i+1 \\ 1 - j/N, & j = i-1 \\ 0, & \text{ellers} \end{cases}$$

Merk at vi starter med en initial-fordeling med maksimal orden (dvs lav entropi): Alle partiklene er i en eneste beholder. Siden denne kjeden er irreducibel og endelig vil overgangsrammsynligheten

konvergere mot den invariante fordelingen. Vi vil se at denne er av lav orden, dvs høy entropi. Dette er dermed et eksempel på prinsippet om voksende entropi.

Har $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & & \\ 1/N & 0 & 1 & 1/N & 0 & \\ 0 & 2/N & 0 & 1-2/N & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \frac{N-1}{N} & 0 & 1-\frac{N-1}{N} \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Pi P = \Pi$ gir $(P^T - I)\Pi^T = 0$

og $P^T - I = \begin{pmatrix} -1 & 1/N & 0 & 0 & & \\ 1 & -1 & 2/N & 0 & & \\ 0 & 1-1/N & -1 & 3/N & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad \Pi_0 = \frac{\Pi_1}{N} \Rightarrow \quad \Pi_1 = N\Pi_0$

og $\quad \Pi_0 - \Pi_1 + \frac{2}{N}\Pi_2 = 0$

$\Rightarrow \quad (1-N)\Pi_0 = -\frac{2}{N}\Pi_2$

$\Rightarrow \quad \Pi_2 = \frac{(N-1)N}{2}\Pi_0 = \frac{N-1}{2}\Pi_1$

Sen ut til at $\pi_i = \binom{N}{i} \pi_0$

Som gir $1 = \sum_{i=0}^{N} \pi_i = \pi_0 + \sum_{i=1}^{N} \binom{N}{i} \pi_0$

$= \pi_0 + \pi_0 \left(-1 + 1 + \sum_{i=1}^{N} \binom{N}{i}\right)$

$= \pi_0 + \pi_0 \left(-1 + \sum_{i=0}^{N} \binom{N}{i} 1^i 1^{N-i}\right)$

$= \pi_0 + \pi_0 \left(-1 + (1+1)^N\right)$

$= \pi_0 \left[1 - 1 + 2^N\right] \Rightarrow \pi_0 = 2^{-N}$.

Så $\pi_i = \binom{N}{i} 2^{-N}$. Vi sen dette vil vise at det passer inn.

Siden et homogent lineærsett ligninger har en eller ∞ løsninger holder det lenge vi i tillegg viser

$\det [P^T - I] \neq 0$

Her, for $1 \leq i \leq N$ at

$$\left(1 - \frac{i-1}{N}\right)\pi_{i-1} - \pi_i + \frac{i+1}{N}\pi_{i+1} = 0.$$

Så $0 \stackrel{?}{=} \left(1 - \frac{i-1}{N}\right)\binom{N}{i-1} - \binom{N}{i} + \frac{i+1}{N}\binom{N}{i+1}$

Siden 2^{-N} er felles faktor.

Har at dette følger av Pascals trekant: $\binom{M}{k} + \binom{M}{k+1} = \binom{M+1}{k+1}$

Siden $\left(1 - \frac{i-1}{N}\right)\binom{N}{i-1}$

$$= \frac{N-i+1}{N} \frac{N!}{(i-1)!\,(N-i+1)!}$$

$$= \frac{(N-1)!}{(i-1)!\,(N-i)!} = \frac{(N-1)!}{(i-1)!\,(N-1-(i-1))!}$$

$$= \binom{N-1}{i-1} \quad \text{og} \quad \frac{i+1}{N}\binom{N}{i+1}$$

$$= \frac{i+1}{N} \frac{N!}{(i+1)!\,(N-i-1)!}$$

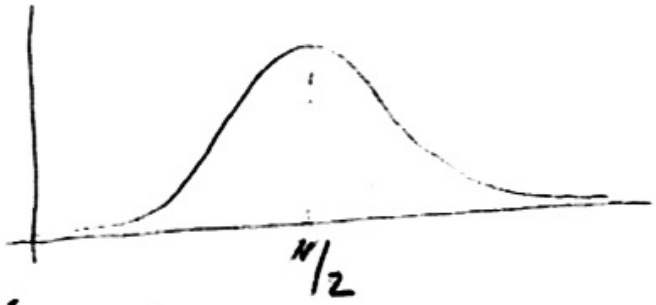
$$= \frac{(N-1)!}{i!\,((N-1)-i)!} = \binom{N-1}{i}$$

Så for $M = N-1$ og $k = i-1$ er relasjonen vi vil vise Pascals trekant, og det gjenstår kun å vise $\det[LP^T - I] \neq 0$, men dette følger direkte av Teorem 3.5.7

som gir unikhet av invariant-fordelingen under rekkefølgen og irreduserbarhet. Rekkefølgen følger av P's irreduserbarhet og endelighet.

$\Rightarrow \Pi_i = \binom{N}{i} 2^{-N}$, som

vil si Π er $\mathrm{Bin}(N, 1/2)$



som for stor N er nær

en $N(N/2, N/4)$.

(Normalfordelingen er en såkalt "Maximum entropy" - fordeling under betingelsene av kjent forventning og varians, som er knyttet til entropi-tilbakegangen av diffusjon.)