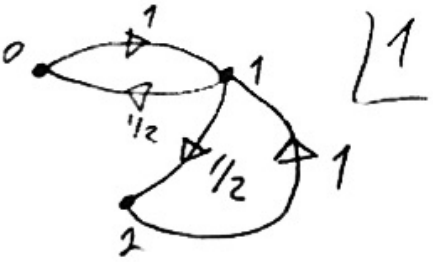
Oppgave 1

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

i)



/1

ii) P er irreduserbel, og dermed er alle tilstandene tilbakevendte.

Har $p_{ii}^{(2n+1)} = 0$ for alle $i \in \{0, 1, 2\}$, $n \geq 0$.

iii) Løser $\pi P = \pi$: $\frac{1}{2}\pi_1 = \pi_0 \Rightarrow \pi_1 = 2\pi_0$

$\pi_0 + \pi_2 = \pi_1 = 2\pi_0 \Rightarrow \pi_2 = \pi_0$

(og $1/2\,\pi_1 = \pi_2$). Har $1 = \sum \pi_i$

$= \pi_0 + 2\pi_0 + \pi_0 = 4\pi_0 \Rightarrow \pi_0 = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \pi_1 = \frac{1}{2}$, $\pi_2 = \frac{1}{4}$.

Teorem 1.7.7 gir dermed $m_i = \frac{1}{\pi_i}$

$\Rightarrow m = (4, 2, 2)$

Oppgave 2

$$P = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.75 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0 & 0.7 \end{pmatrix}$$

i) Siden $p_{ii} > 0$ for alle $i \in \{1, 2, 3\}$, vil $p_{ii}^{(n)} > 0$ for alle $n \geq 0 \Rightarrow$ Alle tilstandene er aperiodiske

ii) Siden P er aperiodisk og irreducibel, vil $\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n = i) = \pi_i$, der π er den invariante fordelingen til P.

$\pi P = \pi \Rightarrow 0.25\pi_1 + 0.3\pi_3 = \pi_1$

$\Rightarrow 0.3\pi_3 = 0.75\pi_1 \Rightarrow \pi_3 = 2.5\pi_1$,

$0.75\pi_1 + 0.5\pi_2 = \pi_2 \Rightarrow 0.75\pi_1 = 0.5\pi_2 \Rightarrow \pi_2 = 1.5\pi_1$

Her $1 = \sum \pi_i = \pi_1 + 1.5\pi_1 + 2.5\pi_1 = 5\pi_1 \Rightarrow \pi_1 = 1/5 \Rightarrow \pi_2 = 0.3$ og $\pi_3 = 0.5$.

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 0.3 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Oppgave 3 Markovegenskap og tids-homogenitet gjør at vi kan anta tiden er 0 når vi observerer kjeden i tilstand 10. Fra tidligere vet vi

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & \ddots \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix},$$ som

er irreducibel.

i) Irreducibiliteten medfører bruk av Teorem 3.5.7., som gir $m_i = E_i \inf\{n \geq 1 : X_n = i\} = \frac{1}{\pi_i}$ der π er den invariante fordelingen. Fra del 7. oppgavesettet vet vi

$$\pi_i = 2^{-(i+1)}, \text{ som gir } m_i = 2^{i+1}$$

$$\Rightarrow m_{10} = 2^{11} = 2048$$

ii) For å bruke Lemma 3.5.10 i manus må kjeden også være reversibel. Siden reversibel er en blandet egenskap, (Teorem 3.4.4), holder det å se på

tilstandsegenskapene til $\{0\}$, som har
enkelt struktur. Har $\mathbb{P}_i(T_i < n)$
$= \mathbb{P}$ (sannsynligheten
for minst en "fail" før tid n)
$= \mathbb{P}(\text{Bin}(n, 1/2) \geq 1)$
$= 1 - \mathbb{P}(\text{Bin}(n, 1/2) = 0)$
$= 1 - \binom{n}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 - 2^{-n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$\Rightarrow$ Kjeden er reversert $\Rightarrow$ Lemma 3.5.10 s. 118
hvor en oppfylt. La $\gamma^k = (\gamma_1^k, \gamma_2^k, \ldots)$
med $\gamma_i^k = \mathbb{E}_k \sum_{n=0}^{T_k - 1} \mathbb{1}\{Y_n = i\}$.
Vi lar finne γ_9^{10}.
Har $\gamma^{10} P = \gamma^{10}$ med $\gamma_{10}^{10} = 1$:
$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2}\gamma_i^{10} = \gamma_0^{10}$ og $\frac{1}{2}\gamma_0^{10} = \gamma_1^{10}$,
$\gamma_2^{10} = \frac{1}{2}\gamma_1^{10} = \frac{1}{4}\gamma_0^{10}$ osv, så
$\gamma_i^{10} = 2^{-(i+1)}\gamma_0^{10}$ Har $\gamma_{10}^{10} = 1$
$= 2^{-(10+1)}\gamma_0^{10} \Rightarrow \gamma_0^{10} = 2^{11}$

$\Rightarrow \gamma_i^{10} = 2^{-(i+1)} 2^{11} = 2^{10-i}$

$\Rightarrow \gamma_9^{10} = 2^1 = 2$ Det er ikke mulig å komme til tilstand 10 uten å gå fra tilstand 9. Dermed er γ_9^{10} også antall ganger det er forventet å måtte prøve å komme fra 9 → 10. Siden det er $\frac{1}{2}$ sannsynlighet for at det er suksess for hvert forsøk, er forventet antall forsøk 2. (Men vi har svart på mye mer ved å finne hele γ^{10}.)

Oppgave 4 Anta $i \in \{1,2,3\}$. Av

forelesningen til $\{1,2,3\}$ vet $p_{ii}^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

La oss se hvorfor:

$$0 \le p_{ii}^{(n)} = \mathbb{P}_i(S_n = i) \le \mathbb{P}_i(S_n \neq 0)$$

$$= 1 - \mathbb{P}_i(S_n = 0)$$

Hvis at for hver gang $X_n \in \{1,2,3\}$ tilfeldes et forsøk for om man havner til $\{0\}$ eller ikke. Man har samme p 1, 0.05 eller 0.01 alt etter som.

$$\Rightarrow p_{i0}^{(n)} \ge \mathbb{P}(\text{Av } n \text{ forsøk med suksess vanns over } 0.01 \text{ har minst 1 blitt "fail".})$$

$$\ge \mathbb{P}(\text{Bin}(n, 0.99) \ge 1) = 1 - \binom{n}{0}$$

$$0.99^n 0.01^0 = 1 - 0.99^n$$

$$\Rightarrow p_{ii}^{(n)} \le 1 - 1 + 0.99^n = 0.99^n$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$ Dette kan vises mer formelt som følger:

Har $p_{ii}^{(n)} = \mathbb{P}_i(S_n = i) \overset{\text{Def}}{=}$

$$\frac{\mathbb{P}(S_n = i, S_0 = 0)}{\mathbb{P}(S_0 = 0)} \leq$$

$0 < \mathbb{P}(S_0 = 0) \leq 1$

$\Rightarrow \frac{1}{\mathbb{P}(S_0 = 0)} \geq 1$

$\mathbb{P}(S_n = i, S_0 = 0) = (*)$

Anta $i \in \{1, 2, 3\}$. Da er, for alle n,

$\{S_n = i\} \cap \{S_n = 0\} \subseteq \{S_n \neq 0$ for alle $n \geq 0\}$

$\Rightarrow (*) \leq \mathbb{P}(S_n \neq 0$ for alle $n \geq 0)$

$= \mathbb{P}($ det finnes ingen $n \geq 0$ slik at $S_n \in \{1, 2, 3\}$, men $S_{n+1} = 0)$

$= \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{3} \{$ Det finnes ingen $n \geq 0$ slik at $S_n = i$, men $S_{n+1} = 0\}$

$\leq \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}($ Det finnes ingen $n \geq 0$ slik at $S_n = i$, men $S_{n+1} = 0) = \sum_{i=1}^{3} \mathbb{P}(\text{Bin}(n, p_{i0}) = 0) = \sum_{i=1}^{3} \binom{n}{0} p_{i0}^0 (1 - p_{i0})^n$

$= \sum_{i=1}^{3} (1 - p_{i0})^n \xrightarrow{n \to \infty} 0$ siden

$0 < 1 - p_{i0} < 1 \Rightarrow p_{ii}^{(n)} \to 0$