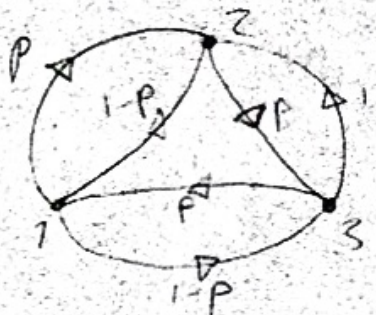
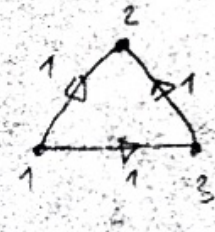
Oppgave 1 La $0 \le p \le 1$ og

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p & 1-p \\ 1-p & 0 & p \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

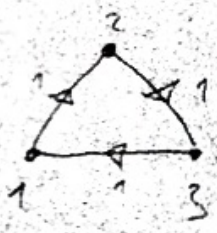


Vi kan anta $0 < p < 1$, siden ellers er P helt klart ikke reversibel.

$p = 0$:



$p = 1$:



Se at P er samme matrise som i eksempel 3.7.6 i manus for $p = 2/3$.

Da var $\pi = (1-p)(1,1,1)$.

Postulere at dette holder generelt, og sjekker:

$$\pi P = (1-p)(1,1,1)\begin{pmatrix} 0 & p & 1-p \\ 1-p & 0 & p \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (1-p)(1-p+p,\ p+1-p,\ 1-p+p)$$

$$= (1-p)(1,1,1) = \pi.$$

Dette kunne også vært funnet ved å løse $\pi P = \pi$ under betingelsen $\sum \pi_i = 1$. Som i eksempel 1.9.4 i Norris omskriver dette at

$\hat{P} = P^T$ fra $\pi_j \hat{p}_{ji} = \pi_i p_{ij}$

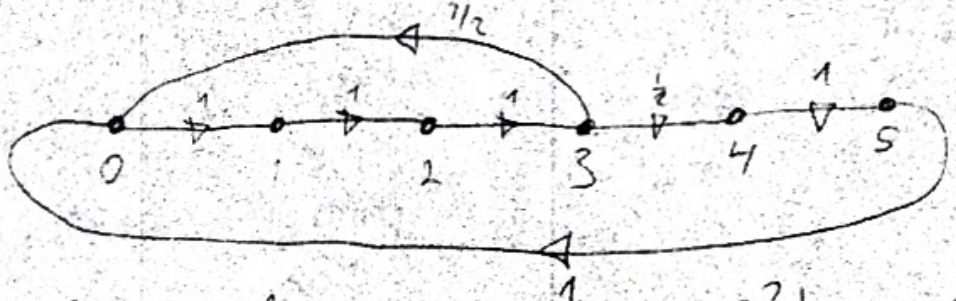
$\Rightarrow \hat{p}_{ji} = \frac{\pi_i}{\pi_j} p_{ij} = p_{ij}$ fra $\pi_i = \pi_j$.

Altså må $P = P^T$ for at P er reversibel. Dette er sant hvis og bare hvis $p = 1/2$, som passer sammen med betraktningene om tilbakevei i eksempel 3.7.6 i manus.

Oppgave 2

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

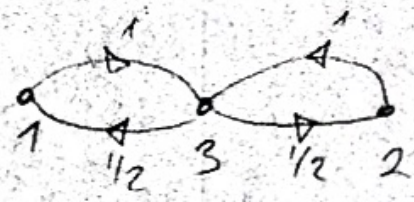
a)



b) Se at for $\{0, 1, 2, 3\}$ kan man komme tilbake i 4 skritt, mens for $\{4, 5\}$ må man minst vente 6 skritt.

c) For $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ vil $\{n \geq 0 : p_{ii}^{(n)} > 0\} = \{4, 6, 8, 10, \ldots\}$
$= \{2n : n \geq 2\} \Rightarrow$ gcd $\{n \geq 0 : p_{ii}^{(n)} > 0\} = 2$. For $i \in \{4, 5\}$ vil gcd $\{n \geq 0 : p_{ii}^{(n)} > 0\} =$ gcd $\{6, 8, 10, \ldots\}$
$=$ gcd $\{2n : n \geq 3\} = 2$.
(Kjedens periode er altså 2).

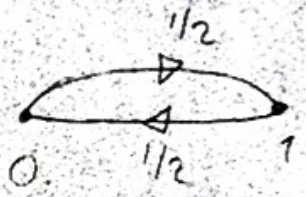
(1) Oppgave 3 $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ 3



Har at $p_{33}^{(n)} = \begin{cases} 1, & n = 2m, m \in \mathbb{N} \\ 0, & n = 2m+1, m \in \mathbb{N} \end{cases}$

$\rightarrow \gcd\{n > 0 : p_{33}^{(n)} > 0\} = 2$

Oppgave 4



$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

a) Kjeden er irreduserbel, rekurrent og 2-periodisk.

b) $\pi P = \pi$ med $\sum \pi_i = 1$:

$$\frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 = \pi_1 \Rightarrow -\frac{1}{2}\pi_1 = -\frac{1}{2}\pi_2$$

$$\Rightarrow \pi_1 = \pi_2 \Rightarrow \pi_1 = \frac{1}{2} = \pi_2$$

Hvis man tenker på tilstand 1 som "mer enn en sukkes" og 0 som "ingen sukkes" vil π's sannsynlighetsmasse være fordelt likt som i oppgave 3 i oppgavesett 7.

Har $P^2 = P$ som gir $P^n \to P$.

Dessuten er $P = (\pi, \pi)$, så π er grensefordelingen til P, til tross for at P er periodisk.

Oppgave 5 Har $\pi P = \pi$.

$\frac{1}{2}\pi_3 + \pi_5 = \pi_0$, $\pi_0 = \pi_1$, $\pi_1 = \pi_2$,

$\pi_2 = \pi_3$, $\frac{1}{2}\pi_3 = \pi_4$ og $\pi_4 = \pi_5$

Har $\pi_3 = \pi_0$ og $\pi_5 = \frac{1}{2}\pi_3 = \frac{1}{2}\pi_0$

Så $1 = \sum_{i=0}^{5} \pi_i = \pi_0 + \pi_0 + \pi_0 + \pi_0$

$+ \frac{1}{2}\pi_0 + \frac{1}{2}\pi_0 = 5\pi_0 \Rightarrow \pi_0 = 1/5$

$\Rightarrow \pi = \frac{1}{5}(1, 1, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Ser fra R at $P^{95+2m} \approx P^{95}$

og $P^{96+2m} \approx P^{96}$ for alle $m \in \mathbb{N}$,

dermed konvergerer ikke P^n, og

har ingen grensefordeling