UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	STK3405/4405 — Elementær innføring i risiko- og pålitelighets-analyse
Eksamensdag:	Fredag 8. desember, 2017
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

I denne oppgaven skal vi betrakte mål for pålitelighetsmessig betydning. La (C, ϕ) være et binært monotont system med komponentmengde $C = \{1, \ldots, n\}$ og strukturfunksjon ϕ. Birnbaum-målet for den pålitelighetsmessige betydningen av komponent $i \in C$ på tid $t \geq 0$ defineres da som:

$$\begin{aligned} I_B^{(i)}(t) &= \mathrm{P}(\text{Komponent } i \text{ er kritisk for systemet på tid } t) \\ &= \mathrm{P}(\phi(1_i \boldsymbol{X}(t)) - \phi(0_i \boldsymbol{X}(t)) = 1) \\ &= \mathrm{E}[\phi(1_i \boldsymbol{X}(t)) - \phi(0_i \boldsymbol{X}(t))], \end{aligned}$$

der $\boldsymbol{X}(t) = (X_1(t), \ldots, X_n(t))$ betegner vektoren av komponenttilstandsvariable på tid $t \geq 0$. Vi antar at $\mathrm{P}(X_i(t) = 1) = p_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$, og lar $\boldsymbol{p}(t) = (p_1(t), \ldots, p_n(t))$ betegne vektoren av komponentpåliteligheter på tid $t \geq 0$. Vi lar $h(t) = \mathrm{P}(\phi(\boldsymbol{X}(t)) = 1) = \mathrm{E}[\phi(\boldsymbol{X}(t)]$ betegne systemets pålitelighet på tidspunkt $t \geq 0$. Dersom $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ er stokastisk uavhengige, kan vi skrive $h(t) = h(\boldsymbol{p}(t))$.

(a) La T_S betegne levetiden til systemet, og la T_i betegne levetiden til komponent i, $i = 1, \ldots n$. Forklar kort at for $t \geq 0$ så er $T_S > t$ hvis og bare hvis $\phi(\boldsymbol{X}(t)) = 1$, og bruk dette til å vise at:

$$I_B^{(i)}(t) = \mathrm{P}(T_S > t | T_i > t) - \mathrm{P}(T_S > t | T_i \leq t), \quad t \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

(b) Anta at $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ er stokastisk uavhengige. Vis at vi da har:

$$I_B^{(i)}(t) = \frac{\partial h(\boldsymbol{p}(t))}{\partial p_i(t)}, \quad t \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

(Fortsettes på side 2.)

Vi innfører nå Birnbaum-målet for den *simultane* pålitelighetsmessige betydningen av komponentene $i, j \in C$ på tid $t \geq 0$ definert ved:

$$I_B^{(i,j)}(t) = \mathrm{E}[\phi(1_i, 1_j, \boldsymbol{X}(t)) - \phi(1_i, 0_j \boldsymbol{X}(t)) \\ - \phi(0_i, 1_j \boldsymbol{X}(t)) + \phi(0_i, 0_j \boldsymbol{X}(t))].$$

(c) Forklar kort at dersom $I_B^{(i,j)}(t) > 0$, så medfører dette at:

$$\mathrm{E}[\phi(1_i, 1_j, \boldsymbol{X}(t)) - \phi(0_i, 1_j \boldsymbol{X}(t))] > \mathrm{E}[\phi(1_i, 0_j \boldsymbol{X}(t)) - \phi(0_i, 0_j \boldsymbol{X}(t))],$$
$$\mathrm{E}[\phi(1_i, 1_j, \boldsymbol{X}(t)) - \phi(1_i, 0_j \boldsymbol{X}(t))] > \mathrm{E}[\phi(0_i, 1_j \boldsymbol{X}(t)) - \phi(0_i, 0_j \boldsymbol{X}(t))],$$

mens de motsatte ulikhetene holder dersom $I_B^{(i,j)}(t) < 0$. Benytt dette til å gi en praktisk fortolkning av fortegnet til $I_B^{(i,j)}(t)$.

(d) Vis at vi for $i, j \in C$ og $t \geq 0$ har:

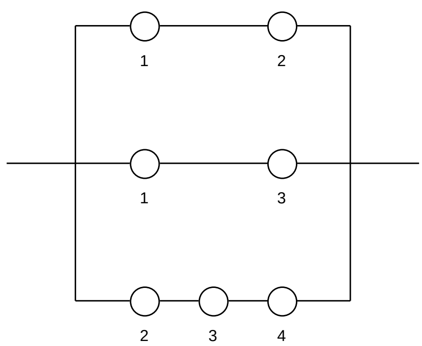
$$I_B^{(i,j)}(t) = \mathrm{P}(T_S > t | T_i > t, T_j > t) - \mathrm{P}(T_S > t | T_i > t, T_j \leq t) \\ - \mathrm{P}(T_S > t | T_i \leq t, T_j > t) + \mathrm{P}(T_S > t | T_i \leq t, T_j \leq t).$$

(e) Anta at $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ er stokastisk uavhengige. Vis at vi da har:

$$I_B^{(i,j)}(t) = \frac{\partial^2 h(\boldsymbol{p}(t))}{\partial p_i(t) \partial p_j(t)}, \quad t \geq 0, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

(f) Anta fortsatt at $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ er stokastisk uavhengige, og la $i, j \in C$ og $t \geq 0$. Anta videre at $0 < p_i(t) < 1$ for alle $i \in C$ og at $n \geq 3$. Vis at $I_B^{(i,j)}(t) > 0$ dersom (C, ϕ) er et seriesystem, og at $I_B^{(i,j)}(t) < 0$ dersom (C, ϕ) er et parallellsystem. Gi en kort kommentar til dette resultatet.

Oppgave 2



Vi skal i denne oppgaven se på et binært monotont system (C, ϕ). Systemet er vist i blokkdiagrammet i figuren over. Systemets komponentmengde er $C = \{1, 2, 3, 4\}$. Vi lar $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ betegne vektoren av

(Fortsettes på side 3.)

komponenttilstandsvariable og antar i hele oppgaven at X_1, X_2, X_3, X_4 er stokastisk uavhengige. Videre lar vi $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ betegne vektoren av komponentpåliteligheter der $p_i = P(X_i = 1)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Vi antar at $0 < p_i < 1$, $i = 1, 2, 3, 4$.

(a) Finn de minimale sti- og kuttmengdene til (C, ϕ).

(b) Vis at systemets strukturfunksjon kan skrives som:

$$\begin{aligned}\phi(\boldsymbol{X}) = {} & X_4[X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3 - 2X_1X_2X_3] \\ & + (1 - X_4)[X_1X_2 + X_1X_3 - X_1X_2X_3],\end{aligned}$$

og benytt dette til å finne systemets pålitelighet, $h(\boldsymbol{p}) = \mathrm{E}[\phi(\boldsymbol{X})]$.

Du kan benytte at Birnbaum-målet for den pålitelighetsmessige betydningen til komponent $i \in C$ er gitt ved:

$$I_B^{(i)} = \frac{\partial h(\boldsymbol{p})}{\partial p_i}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

og at Birnbaum-målet for den simultane pålitelighetsmessige betydningen til komponentene $i, j \in C$ er gitt ved:

$$I_B^{(i,j)} = \frac{\partial^2 h(\boldsymbol{p})}{\partial p_i \partial p_j}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4.$$

(c) Vis at:

$$I_B^{(4)} = p_2p_3 - p_1p_2p_3.$$

(d) Vis at:

$$I_B^{(1,4)} < 0, \text{ og } I_B^{(i,4)} > 0, \quad i = 2, 3.$$

Gi en kort kommentar til disse resultatene.

Oppgave 3

Dersom $X_1, X_2, \ldots$ er en uendelig sekvens av uavhengig, identisk fordelte stokastiske variable der $\mathrm{E}[X_i] = \mu < \infty$, kan det vises at:

$$P(\bar{X}_n \to \mu) = 1,$$

der $\bar{X}_n = (X_1 + \cdots X_n)/n$, $n = 1, 2, \ldots$.

La $\{S(t)\}$ være en stokastisk prosess der $S(t)$ betegner tilstanden til prosessen på tid $t \geq 0$. Vi sier at $\{S(t)\}$ er en *hoppeprosess* dersom $S(t)$ kan uttrykkes på formen:

$$S(t) = S(0) + \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{I}(T_j \leq t) J_j, \qquad t \geq 0,$$

der $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \cdots$ er en sekvens av stokastiske tidspunkter, og $J_1, J_2, \ldots$ er en sekvens av stokastiske *hopp*.

(Fortsettes på side 4.)

Vi innfører:

$$N(t) = \sum_{j=1}^{\infty} I(T_j \leq t) = \text{Antall hopp i [0, t]}.$$

Prosessen $\{S(t)\}$ sies å være *regulær* dersom $P(N(t) < \infty) = 1$ for alle $t > 0$.

Vi lar så $\Delta_j = T_j - T_{j-1}$, $j = 1, 2, \ldots$.

(a) Vis at dersom følgen $\{\Delta_j\}$ inneholder en uendelig delfølge, $\{\Delta_{k_j}\}$, av uavhengige, identisk fordelte stokastiske variable slik at $E[\Delta_{k_j}] = d > 0$, så er $\{S(t)\}$ regulær.

(b) Forklar hvorfor regularitet er viktig i forbindelse med simulering av hoppeprosesser.