UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

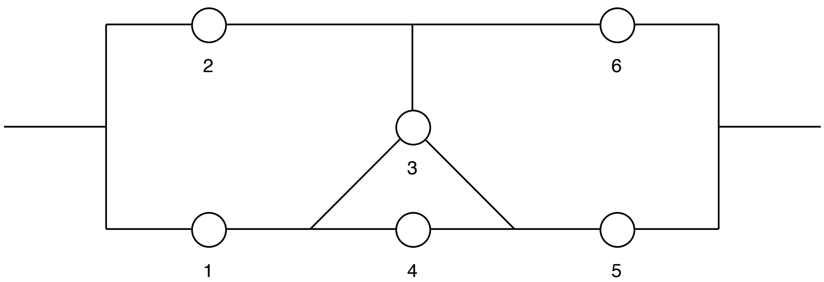
Eksamen i:	STK3405/4405 — Elementær innføring i risiko- og pålitelighetsanalyse
Eksamensdag:	Onsdag 19. desember 2018.
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Alle delpunkter vektlegges likt i sensuren.

Oppgave 1

I denne oppgaven skal vi analysere det binære monotone systemet (C, ϕ) i Figur 1. Komponentmengden til systemet er $C = \{1, 2, \ldots, 6\}$. La $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_6)$ være vektoren av komponenttilstandsvariable, og anta gjennom hele denne oppgaven at $X_1, X_2, \ldots, X_6$ er stokastisk uavhengige. La $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_6)$ være vektoren bestående av komponentpåliteligheter, der $p_i = P(X_i = 1)$, $i = 1, 2, \ldots, 6$. Vi antar at $0 < p_i < 1$ for $i = 1, 2, \ldots, 6$.



Figur 1: Et binært monotont system med 6 komponenter.

a) Finn de minimale kutt- og stimengdene til systemet.

b) Bruk resultatet fra a) for å finne et utrykk for strukturfunksjonen

(Fortsettes på side 2.)

til systemet, og forklar kort hvordan dette utrykket kan brukes til å beregne systempåliteligheten. En detaljert utregning kreves ikke.

c) Bruk faktoriseringsalgoritmen til å finne påliteligheten til systemet på en annen måte enn den i b).

d) Hva er definisjonen av Birnbaummålet for den pålitelighetsmessige betydningen til en komponent?

e) Hva er den pålitelighetsmessige betydningen til komponent 3 i henhold til Birnbaummålet? Hvordan kan du bruke dette til å finne den strukturelle betyningen av komponent 3?

f) Anta at $p_i = p$ for $i = 1, 2, \ldots, 6$, altså at alle komponentene har samme komponentpålitelighet. Hva kan du si om den pålitelighetsmessige betydningen til de andre 5 komponentene?

Oppgave 2

I denne oppgaven skal vi se på et binært monotont system (C, ϕ), der $C = \{1, 2, 3\}$ og der strukturfunksjonen ϕ er gitt ved:

$$\phi(\boldsymbol{X}) = \mathrm{I}(\sum_{i=1}^{3} X_i \geq 2).$$

Her betegner $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, X_3)$ vektoren av komponenttilstandsvariable og $\mathrm{I}(\cdot)$ betegner indikatorfunksjonen.

a) Vis at strukturfunksjonen ϕ kan skrives som:

$$\phi(\boldsymbol{X}) = X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3 - 2X_1X_2X_3.$$

Vi antar i det etterfølgende at:

$$X_i = Y_0 \cdot Y_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

der Y_0, Y_1, Y_2, Y_3 er uavhengige binære stokastiske variable og:

$$P(Y_0 = 1) = \theta,\ P(Y_1 = 1) = P(Y_2 = 1) = P(Y_3 = 1) = q,$$

der $0 < \theta < 1$ og $0 < q < 1$.

b) Forklar hvorfor dette medfører at X_1, X_2, X_3 er assosierte stokastiske variable.

Vi innfører så $h = \mathrm{E}[\phi(\boldsymbol{X})] = P(\phi(\boldsymbol{X}) = 1)$.

c) Vis at:

$$h = h(\theta, q) = \theta q^2(3 - 2q).$$

(Fortsettes på side 3.)

Anta at vi ignorerer avhengigheten mellom X_i-ene, og i stedet regner ut systempåliteligheten som om X_1, X_2, X_3 er uavhengige og:

$$P(X_i = 1) = \theta q, \quad i = 1, 2, 3.$$

La $\tilde{h}$ betegne den systempåliteligheten vi får i det tilfellet.

d) Vis at:

$$\tilde{h} = \tilde{h}(\theta, q) = \theta^2 q^2 (3 - 2\theta q).$$

e) Anta at $\theta = \frac{1}{2}$. Vis at da er $\tilde{h} < h$ for alle $0 < q < 1$.

f) Anta isteden at $\theta = \frac{3}{4}$. Hva kan du si om forholdet mellom $\tilde{h}$ og h i dette tilfellet?

Oppgave 3

La (C, ϕ) være et binært monotont system, og la $\boldsymbol{X}$ betegne vektoren av komponenttilstandsvariable. Vi skal i denne oppgaven på hvordan vi kan estimere påliteligheten til systemet, $h = P(\phi(\boldsymbol{X}) = 1)$ ved bruk av Monte Carlo simulering. Det enkleste Monte Carlo estimatet er:

$$\hat{h}_{MC} = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^{N} \phi(\boldsymbol{X}_r),$$

der $\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_N$ er data generert fra fordelingen til $\boldsymbol{X}$.

For å forbedre dette estimatet lar vi $S = S(\boldsymbol{X})$ være en stokastisk variabel med verdier i mengden $\{s_1, \ldots, s_k\}$. Vi antar at fordelingen til S er kjent, og innfører:

$$\theta_j = E[\phi | S = s_j], \quad j = 1, \ldots, k.$$

Vi benytter så Monte Carlo simulering til å estimere $\theta_1, \ldots, \theta_k$, og genererer data fra den betingede fordelingen til $\boldsymbol{X}$ gitt S. Vi lar $\{\boldsymbol{X}_{r,j} : r = 1, \ldots, N_j\}$ betegne vektorene generert fra fordelingen til $\boldsymbol{X}$ gitt at $S = s_j$, $j = 1, \ldots, k$, og får da følgende estimater:

$$\hat{\theta}_j = \frac{1}{N_j} \sum_{r=1}^{N_j} \phi(\boldsymbol{X}_{r,j}), \quad j = 1, \ldots, k.$$

Disse estimatene kombineres til følgende estimat for påliteligheten til systemet:

$$\hat{h}_{CMC} = \sum_{j=1}^{k} \hat{\theta}_j P(S = s_j).$$

(Fortsettes på side 4.)

a) Vis at $E[\hat{h}_{CMC}] = h$ og at variansen til estimatet er gitt ved:

$$\mathrm{Var}(\hat{h}_{CMC}) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{N_j} \mathrm{Var}(\phi | S = s_j)[P(S = s_j)]^2$$

b) Anta at $N_j \approx N \cdot P(S = s_j)$, $j = 1, \ldots, k$. Vis at vi da har:

$$\mathrm{Var}(\hat{h}_{CMC}) \approx \frac{1}{N}(\mathrm{Var}(\phi) - \mathrm{Var}[E(\phi|S)]),$$

og forklar kort hvorfor dette medfører at $\mathrm{Var}(\hat{h}_{CMC}) \leq \mathrm{Var}(\hat{h}_{MC})$.

c) Hva bør man ta hensyn til når man velger variabelen S?

SLUTT