UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	STK2520 — Problemer og metoder i aktuarfag.
Eksamensdag:	Torsdag 2. desember, 2010.
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00.
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Merk: *Av de fem oppgavene nedenfor kan du nøye deg med å velge fire og besvare dem. Du plukker de du vil besvare ut selv. A er oppnåelig med bare fire av fem! Du bør legge vekt på å formulere svarene kort og presist.*

Oppgave 1

La X være et skadeforsikringselskaps samlete utbetaling til en polise i løpet av et år.

a) Hva menes med polisens rene premie? Uttrykk definisjonen matematisk.

b) Gjør rede for begrepet premiepåslag ("loading") og hvorfor et selskap må beregne seg mer enn den rene premie.

Anta at et selskap har ansvaret for en portefølje av J poliser og at den risiko disse representerer er uavhengig av hverandre. La $X_1, \dots, X_J$ være utbetalingene til disse polisene over ett år.

c) Hva menes med porteføljens reserve? Gi en matematisk definisjon.

d) Argumenter for at forutsetningene ovenfor tilater full diversifisering (dvs. at relativ risiko går mot 0 når $J \to \infty$) gjennom å vise at dersom $\xi = E(X_j)$ og $\sigma = E(X_j)$ er felles for alle polisene, så vil

$$\frac{\mathrm{sd}(X_1 + \cdots + X_J)}{E(X_1 + \cdots + X_J)} \to 0 \qquad \text{når} \qquad J \to \infty.$$

Oppgave 2

Anta at utbetalingene fra polisene i foregående oppgave har samme sannsynlighetsfordeling slik at det totale krav $\mathcal{X}$ mot porteføljens kan uttrykkes

$$\mathcal{X} = Z_1 + \cdots + Z_{\mathcal{N}}$$

(Fortsettes på side 2.)

der $\mathcal{N}$ er antall skader. Forutsett at $\mathcal{N}$ er Poisson-fordelt med parameter λ. Utbetalingene $Z_1, Z_2, \ldots$ antas Pareto-fordelt med sannsynlighetstetthet og fordelingsfunksjon

$$f(z) = \frac{\alpha/\beta}{(1+z/\beta)^{1+\alpha}} \qquad \text{og} \qquad F(z) = 1 - \frac{1}{(1+z/\beta)^{\alpha}}$$

der α og β er positive parametre. Alle utbetalingene $Z_1, Z_2, \ldots$ er innbyrdes uavhengige og av skadeantallet $\mathcal{N}$. Det oppgis at $E(Z) = \beta/(\alpha-1)$.

a) Du vil ikke uten videre finne en trekningsalgoritme for Pareto-fordelinger i offentlig tilgjengelig programvare. Utled en selv ved å utnytte inversjonsalgoritmen slik at en uniform trekning U^* blir overført til en Pareto-trekning Z^*.

b) Lag en skisse av et program som genererer m simuleringer av $\mathcal{X}$.

Tabellen nedenfor viser forventning, standardavvik og en del persentiler i fordelingen til $\mathcal{X}$ når $\lambda = 10$, $\alpha = 5$ og $\beta = 10$. Det er brukt 100000 simuleringer:

$E(\mathcal{X})$	sd$(\mathcal{X})$	1%	5%	25%	50%	75%	95%	99%
25.0	12.8	4.3	8.0	15.8	23.0	31.9	48.8	64.2

c) Sjekk programmet ved å sammenholde verdien for $E(\mathcal{X})$ i tabellen med den teoretiske verdien du kan beregne fra opplysninger gitt i oppgaven. Bestås testen?

d) Hva blir forsikringselskapets 95% og 99% reserve?

Anta at deler av risikoen er re-assurert til et annet selskap ved at den delen av $\mathcal{X}$ som overstiger $a = 30$ dekkes av re-assurandør gjennom at sistnevnte overfører $\mathcal{X}^{\text{re}} = \max(\mathcal{X} - a, 0)$ tilbake til cedent.
e) Hvordan simuleres re-assurandørs risiko?

Tabellen nedenfor, beregnet fra 100000 simuleringer, viser sannsynlighetsfordelingen til $\mathcal{X}^{\text{re}}$:

$E(\mathcal{X}^{\text{re}})$	sd$(\mathcal{X}^{\text{re}})$	1%	5%	25%	50%	75%	95%	99%
3.15	7.37	0	0	0	0	1.94	18.76	34.25

f) Finn fram til den rene premien for re-assuransen. Hva blir re-assurandørens 95% og 99% reserve?

Oppgave 3

Anta at et individ i alder l_0 tegner en pensjonsforsikring med en en pensjon s som starter å løpe i alder $l_0 + K$ og varer livet ut. Premiene π betales forskuddsvis ved inngangen til hver periode fra alder l_0 opp til alder $l_0 + K - 1$, og forsikringselskapet overtar den oppsparte kapitalen om individet dør i denne

(Fortsettes på side 3.)

perioden. La p_l være sannsynligheten for at individet når det har nådd alder l overlever til alder $l+1$ og la $d = 1/(1+r)$ være diskonteringsfaktoren.

a) Gjør rede for at sannsynligheten ${}_kp_{l_0}$ for at den forsikrede er i live i alder $l_0 + k$ kan uttrykkes

$$ {}_kp_{l_0} = p_{l_0} p_{l_0+1} \cdots p_{l_0+k-1}. $$

b) Bruk disse størrelsene til å uttrykke verdien V_0 av kontrakten idet den inngåes. Bruk summer eller dødlighetsjusterte annuiteter.

c) Hva blir kontraktens ekivalenspremie?

d) Anta at poliseinnehaver er i live på tidspunkt k. Definer kontraktens verdi på dette tidspunkt gjennom et uttrykk tilsvarende det i b).

e) Anta at kontrakten oppheves etter k perioder. Hvor mye skal poliseinnehaver da betales tilbake?

Oppgave 4

En vanlig modell for verdien av en aksje eller aksjeindeks er tilfeldig gang ("random walk") på logaritmisk skala. Dette betyr at om S_k er verdien på tidspunkt k og $Y_k = \log(S_k)$, så utvikler S_k seg gjennom spesifikasjonen

$$ Y_k = Y_{k-1} + X_k \qquad \text{og} \qquad S_k = e^{Y_k} $$

der $X_1, X_2, \ldots$ er stokastisk uavhengige og identisk fordelte. Rekursjonen starter i $Y_0 = \log(s_0)$ der s_0 er verdien av aksjen på tidspunkt 0. Anta i det etterfølgende at X_k er normal med forventning ξ og standardavvik σ. Det oppgis for bruk i denne oppgaven at om Z er normal med forventning η og standardavvik τ, så er $E(e^Z) = e^{\eta+\tau^2/2}$.

a) Vis først at aksjens avkasting ("return") i k'te periode kan uttrykkes $R_k = e^{X_k} - 1$.

b) Gjør rede for at Y_k under forutsetningene ovenfor er normalfordelt med forventning $\log(s_0) + k\xi$ og standardavvik $\sqrt{k}\,\sigma$ og at $E(S_k) = s_0 e^{k\xi + k\sigma^2/2}$.

c) Lag en programskisse som viser hvordan du vil simulere $S_1, \ldots, S_K$.

Aksjeutviklingen ble simulert 100000 ganger når $\xi = 0.05$, $\sigma = 0.2$, $s_0 = 1$ og $K = 10$, og sannsynlighetsfordelingen til S_K ble beregnet fra simuleringene. Dette ga følgende tabell:

$E(S_K)$	sd(S_K)	1%	5%	25%	50%	75%	95%	99%
2.01	1.41	0.38	0.58	1.07	1.64	2.52	4.67	7.16

d) Samsvarer forventningen i tabellen med den teoretiske verdien du kan regne ut fra opplysningene ovenfor? Kort begrunnelse.

(Fortsettes på side 4.)

e) Hvordan kan du bruke tabellen til å anslå sannsynlighetsfordelingen for avkastningen etter 10 år? Hvor sannsynlig er det (omtrent) at du under denne modellen har tapt penger? Hva med sannsynligheten for at kapitalen er doblet? At den er fire-doblet?

Oppgave 5

Aksjeinvesteringen i forrige oppgave kunne kombineres med bankinnskudd som gir den til enhver tid flytende rente. Om B_k er saldoen på tidspunkt k, utvikler denne seg i henhold til rekursjonen

$$B_k = (1 + r_k)B_{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots \qquad \text{med start i} \qquad B_0 = b_0.$$

For renten innføres modellen $r_k = \zeta e^{Z_k}$ der

$$Z_k = aZ_{k-1} + \tau\varepsilon_k, \qquad k = 1, 2, \ldots \qquad \text{med start i} \qquad Z_0 = \log(r_0/\zeta).$$

Her er ζ, a og τ parametre, og $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ uavhengige, normale stokastiske variable med forventning 0 og standardavvik 1.

a) Lag en skisse av et program som simulerer $B_1, \ldots, B_K$.

b) Hvordan kan programmet kombineres med det i oppgave 4c) slik at du simulerer verdien av den totale finansporteføljen $V_k = S_k + B_k$ for $k = 1, 2, \ldots$ når investeringen er delt mellom aksjer og bankinnskudd? Forutsett at aksjemarked og rente varierer uavhengig av hverandre.

La kapitalen i starten (tid 0) være lik 1 som i oppgave 4, men la aksjeinvesteringen nå bli redusert til 0.5 og sett resten i banken. Legg til grunn aksjemodellen i oppgave 4 og anta at $\zeta = 0.03$, $a = 0.6$, $\tau = 0.25$ og $r_0 = 0.03$ i rentemodellen ovenfor. Dette ga den sannsynlighetsfordelingen for V_K etter $K = 10$ år som er vist i tabellen nedenfor (100000 simuleringer):

$E(V_K)$	sd(V_K)	1%	5%	25%	50%	75%	95%	99%
1.69	0.70	0.86	0.97	1.22	1.50	1.94	3.01	4.25

c) Hvorledes har det forhold at halvparten av aksjeinvesteringen er byttet ut med et bankinnskudd påvirket sannsynlighetsfordelingen for porteføljens 10-års avkastning? Sammenlign med tabellen i oppgave 4 og gi en *kort* redegjørelse.

SLUTT