UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: STK2520 — Problemer og metoder i aktuarfag.

Eksamensdag: Torsdag 1. desember 2011.

Tid for eksamen: 09:00 – 13:00.

Oppgavesettet er på 4 sider.

Vedlegg: Ingen.

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Nyttige formler
Til bruk i disse oppgavene oppgis reglene om dobbel-forventning og varians, dvs. at

$$E(Y) = E\{\xi(\mathbf{X})\} \qquad \text{og} \qquad \operatorname{var}(Y) = E\{\sigma^2(\mathbf{X})\} + \operatorname{var}\{\xi(\mathbf{X})\}$$

der $\xi(\mathbf{x}) = E(Y|\mathbf{X} = \mathbf{x})$ og $\sigma^2(\mathbf{x}) = \operatorname{var}(Y|\mathbf{X} = \mathbf{x})$. Dessuten kan uttrykkene for log-normal forventning og standardavvik komme til nytte, det vil si at om θ og τ er parametre og $\varepsilon \sim N(0,1)$, så gjelder

$$E(e^{\theta+\tau\varepsilon}) = e^{\theta+\tau^2/2} \qquad \text{og} \qquad \operatorname{sd}(e^{\theta+\tau\varepsilon}) = e^{\theta+\tau^2/2}\sqrt{e^{\tau^2}-1}.$$

Oppgave 1
La $X_1, \dots, X_J$ være utbetalingene til J poliser i løpet av ett år og $\mathcal{X} = X_1 + \cdots + X_J$ summen for hele porteføljen. Anta at $X_1, \dots, X_J$ har samme sannsynlighetsfordeling.

a) Gi et lite matematisk resonnement som viser at dersom polisenes skader er uavhengig av hverandre, så vil $\operatorname{sd}(\mathcal{X})/E(\mathcal{X}) \to 0$ når $J \to \infty$.

b) Utled et uttrykk for $\operatorname{sd}(\mathcal{X})/E(\mathcal{X})$ når riskene $X_1, \dots, X_J$ avhenger av en felles, tilfeldig faktor ω og gjør rede for at resulatet i a) ikke lenger er riktig. [**Hint:** Anta at $X_1, \dots, X_J$ er uavhengige gitt ω og bruk reglene om dobbel-forventning og dobbel-varians].

La $\mathcal{N}$ være antall krav mot porteføljen slik at

$$\mathcal{X} = Z_1 + \cdots + Z_{\mathcal{N}}$$

der $Z_1, Z_2, \dots$ er utbetalingene per hendelse. Forutsett i det etterfølgende at deres sannsynlighetsfordeling er logistisk med fordelingsfunksjon

$$F(z) = 1 - \frac{1+\alpha}{1+\alpha e^{z/\beta}}, \qquad z > 0$$

der α og β er positive parametre.

(Fortsettes på side 2.)

c) Du vil ikke finne en trekningsalgoritme for denne modellen i vanlig programvare. Lag en selv ved bruk av inversjonsalgoritmen.

d) Lag et simuleringsprogram for $\mathcal{X}$ når $\mathcal{N}$ er Poissonfordelt med parameter $\lambda = J\mu T$.

Persentiler for $\mathcal{X}$ når $\lambda = 20$, $\alpha = 2$ og $\beta = 1$ er gitt i tabellen ($m = 100000$ simuleringer brukt).

$E(\mathcal{X})$	1%	5%	25%	50%	75%	90%	95%	99%
24.3	9.65	13.20	19.11	23.84	29.00	34.10	37.35	43.65

e) Hva er reserven ved 95% og 99%?

Anta at for hver hendelse der Z overstiger a overføres $Z - a$ til porteføljen fra en re-forsikrer, men aldri mer enn et maksimumsbeløp b.

f) Modifiser programmet i d) slik at re-forsikrers risiko $\mathcal{X}^{\text{re}}$ simuleres.

Simuleringer for parametrene ovenfor med $a = 2$ og $b = 8$ ga tabellen

$E(\mathcal{X})$	1%	5%	25%	50%	75%	90%	95%	99%
3.93	0	0.31	1.79	3.41	5.52	7.78	9.33	12.57

g) Hva er den rene premie ved re-forsikringen og hva er re-forsikrers 95% og 99% reserve?

Oppgave 2

Pensjonene i denne oppgaven trer i kraft i alder l_r år og utbetales som et beløp s i begynnelsen av året helt til den forsikrede går bort. For å verdisette dem trengs tabeller ${}_kp_l$ over sannsynlighetene for å leve k år lenger i alder l samt en diskonteringsrente r.

a) Skriv opp et uttrykk for forventet nåverdi π_{l_0} av en slik pensjon for en person i alder l_0 år når $l_0 < l_r$.

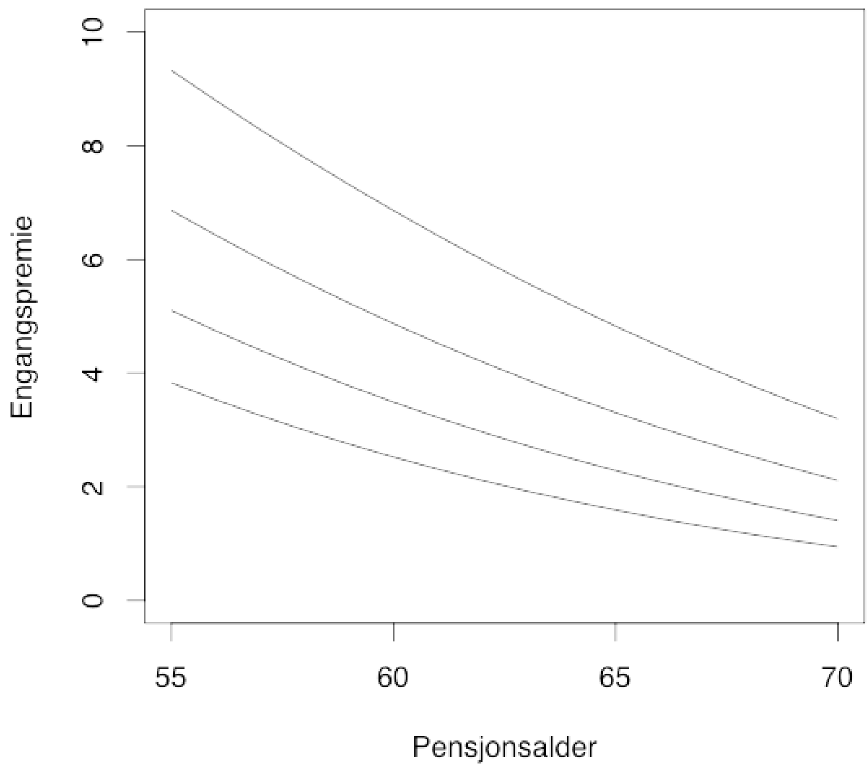
b) Samme spørsmål når $l_0 \geq l_r$.

Figuren viser π_{l_0} mot pensjonsalder l_r mellom 55 og 70 år når $l_0 = 35$, $s = 1$ og levetidstabellen er

$${}_kp_l = \exp\left(-\theta_0 k - \frac{\theta_1}{\theta_2}(e^{\theta_2 k} - 1)e^{\theta_2 l}\right)$$

der $\theta_0 = 0.009$, $\theta_1 = 0.000046$ og $\theta_2 = 0.0908$. Renten er variert mellom 0.02, 0.03, 0.04 og 0.05.

(Fortsettes på side 3.)



c) Forklar mønstret i figuren i en setning eller to samt hvilke kurver som hører til hvilke renter.

d) Dersom pensjonen finansieres av faste bidrag ζ i starten av hvert år fra l_0 til og med $l_r - 1$, hva er forventet nåverdi av bidragene?

e) Redgjør for hva det betyr at ζ bestemmes som ekvivalenspremien og skriv opp et uttrykk for den.

Anta at porteføljen inneholder N_l personer i alder l år.

f) Hva er porteføljens samlete forpliktelse for disse personene når du ikke regner med fremtidig premie?

Oppgave 3

a) Dersom $R_1, \ldots, R_K$ er avkastningene til en finansiell investering i K perioder, hva blir da den akumulerte avkastningen $R_{0:K}$ for alle periodene samlet?

b) Hva er den vanlige modellen for $R_1, \ldots, R_K$ hvis investeringene er plasseringer i aksjer?

c) Bestem sannsynlighetsfordelingen til $R_{0:K}$ dersom modellen i b) er log-normal.

Fordelingen til $R_{0:K}$ er betydelig mer komplisert for investeringer i andre ting enn aksjer. Forusett i det etterfølgende at $R_k = r_k$ dreier seg om flytende rente der $r_1, \ldots, r_K$ følger en

(Fortsettes på side 4.)

log-normal, autoregressiv model av typen

$$r_k = \xi e^{-\frac{1}{2}\sigma^2/(1-a^2)+X_k} \qquad \text{der} \qquad X_k = aX_{k-1} + \sigma\varepsilon_k, \quad k = 1, \dots, K.$$

Her er ξ, a og σ parametre der $|a| < 1$ og $\varepsilon_1 \dots, \varepsilon_K$ uavhengige og $N(0,1)$. Rekursjonen starter i $X_0 = x_0$ der $x_0 = \log(r_0/\xi) + \frac{1}{2}\sigma^2/(1-a^2)$.

d) Lag et program som simulerer $r_{0:K} = R_{0:K}$ under denne modellen.

Gå ut fra som kjent at

$$E(X_k|x_0) = a^k x_0 \qquad \text{og} \qquad \mathrm{sd}(X_k|x_0) = \sqrt{\frac{1-a^{2k}}{1-a^2}}\,\sigma.$$

e) Bruk dette til å verifisere at

$$E(r_k|r_0) = \xi e^{a^k x_0 - \frac{1}{2}\sigma^2 a^{2k}/(1-a^2)} \qquad \text{og} \qquad \mathrm{sd}(r_k|r_0) = E(r_k|r_0)\sqrt{e^{\sigma^2(1-a^{2k})/(1-a^2)} - 1}.$$

f) Gjør rede for at når $k \to \infty$, så vil

$$E(r_k|r_0) \to \xi \qquad \text{og} \qquad \mathrm{sd}(r_k|r_0) \to \xi\sqrt{e^{\sigma^2/(1-a^2)} - 1}.$$

SLUTT