UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	STK2520 — Problemer og metoder i aktuarfag.
Eksamensdag:	Mandag 3. desember 2012
Tid for eksamen:	09.00 – 13.00
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Formelark er inkludert i oppgavesettet
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 (vekt 10)

Betrakt følgende brannforsikringsdata til Copenhagen Reinsurance i perioden fra 12/01/1987 and 12/16/1987:

Dato	Krav i DKM
12/02/1987	3.05195
12/06/1987	1.468460
12/07/1987	7.14286
12/09/1987	9.08163
12/12/1987	7.52226
12/13/1987	9.17161
12/14/1987	3.64935
12/16/1987	2.040816

Brannforsikringskravene X_i i tabellen er uttrykt i millioner av danske kroner. Anta at tiden W_i mellom to krav (inter-arrival time) er beskrevet av Cramer-Lundberg-modellen.

(i) Beregn maximum-likelihood-estimatet $\widehat{\lambda}$ til hoppeintensiteten av kravtellingsprosessen $N(t)$.

(ii) Regn ut

$$P(W_1 > 3).$$

(iii) Estimer $E[X_1]$ ved hjelp av den empiriske forventningsverdien (sample mean) og regn ut premien $p_{EV}(t)$ m.h.p. totalskadesummen $S(t)$ som er gitt ved

$$(1 + \rho)E[S(t)],$$

hvor ρ er et påslag (safety loading) med $\rho = 0.3$ og $t = 1$ (år).

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2 (vekt 10)

La oss anta at vi har to porteføljer av brannforsikringskontrakter med totalskadesummer som er modellert av

$$S_i(t) = \sum_{j=1}^{N_i(t)} X_j^{(i)}, \ i = 1, 2.$$

De kravtellingsprosessene $N_1(t)$ og $N_2(t)$ er modellert av homogene Poissonprosesser med intensitet $\lambda_1 = \frac{1}{7}$ og $\lambda_2 = \frac{2}{5}$, respektivt. Det kreves at $N_i(t)$ er uavhengig av de *i.i.d* brannkravene $(X_j^{(i)})_{j\geq 1}$ for hvert $i = 1, 2$. Dessuten er det antatt at totalskadesummene er uavhengige og at kravene i de tilsvarende porteføljene har følgende fordelinger:

$$\begin{array}{lll} P(X_j^{(1)} = 0) = 0 & P(X_j^{(1)} = 1) = \frac{2}{9} & P(X_j^{(1)} = 2) = \frac{7}{9} \\ P(X_j^{(2)} = 0) = 0 & P(X_j^{(2)} = 2) = \frac{1}{5} & P(X_j^{(2)} = 3) = \frac{4}{5} \end{array}$$

for alle $j \geq 1$. Valutaen er i millioner av danske kroner.

Beregn den eksakte fordelingen til den samlede totalskadesummen, dvs.

$$P(\widetilde{S}(t) \leq n),$$

hvor

$$\widetilde{S}(t) = S_1(t) + S_2(t)$$

for $n = 0, ..., 3$ i millioner av danske kroner og $t = 1$ (dag).

Oppgave 3 (vekt 10)

Betrakt en sammensatt livsforsikring som varer i 4 år (4−years endowment). Ved denne forsikringsformen utbetales enten summen c_{k+1} på slutten av dødsåret $k+1$ hvis $k = 0, 1, 2, 3$ eller E på slutten av kontraktperioden, hvis $k \geq 4$. Anta at $E = 4$ og

k år	c_{k+1}	q_{x+k}
0	1	0.018
1	3	0.020
2	5	0.022
3	7	0.024

Som motytelse for denne garantien kreves årlige premier (annual net premiums) $\Pi_k = \Pi_0(1.02)^k$, $k = 0, 1, 2, 3$ som innbetales ved begynnelsen av året så lenge forsikringstakeren er i live. Effektivrenten er $i = 0.03$.

(i) Finn Π_0.

(ii) Beregn netto-premiereservene ${}_{k+1}V, k = 0, 1, 2, 3$ til kontrakten.

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 4 (vekt 10)

(i) Anta

$$ {}_tp_x = \frac{100 - x - t}{100 - x} $$

for $0 \leq x < 100$ og $0 \leq t \leq 100 - x$. Beregn dødsintensiteten μ_{45} (force of mortality).

(ii) Betrakt en 16 år gammel forsikringstaker med gjenværende levetid $T = T(16)$. Anta at dødsintensiteten følger de Moivre's lov og $E[T] = 36$.

Regn ut $Var[T]$.

(iii) Betrakt to uavhengige liv på alder $x = 24$ år. Anta at dødsintensitetene til disse livene er beskrevet av Gompertz-Makeham-modellen og er gitt ved

$$ \mu_{1,x+t} = 0.000044 \cdot \left(10^{0.042}\right)^{x+t} \text{ og } \mu_{2,x+t} = 0.000031 \cdot \left(10^{0.042}\right)^{x+t} $$

for $t \geq 0$. Beregn sannsynligheten for at det første livet overlever det andre, dvs. hva er

$$ P(T_1 > T_2) \ ? $$

Oppgave 5 (vekt 5)

La $(X_i)_{i \geq 1}$ være en $i.i.d$-følge av brannkrav. Anta at X_1 har tetthetsfunksjon g og at $P(X_1 > x) > 0$ for alle $x \geq 0$. Dessuten la $R(n)$, $n \geq 1$ være følgen av "rekordtidspunkt" definert som

$$ R(n+1) := \inf \left\{ k > R(n) : X_k > X_{R(n)} \right\} $$

for $n \geq 1$, hvor $R(1) := 1$ og $\inf \varnothing := \infty$, dvs. på tidspunkt $R(n)$ observeres den nye brannkravrekorden $X_{R(n)}$. Anta at $L(n)$ er antallet av rekorder in en stikkprøve med et omfang på n, dvs.

$$ L(n) := \# \{ 1 \leq i \leq n : R(i) \leq n \} $$

for $n \geq 1$ ($\#A$ er lik antallet av elementer i en mengde A).

(i) Finn en formel for sannsynligheten $P(X_{R(2)} > x$ og $X_1 < x$ og $R(2) < \infty)$ for alle $x > 0$. Regn ut denne sannsynligheten for $X_1 \sim Exp(1)$.

(ii) Utled en formel for $Var[L(n)]$ og beregn $Var[L(5)]$.

SLUTT

(Fortsettes på side 4.)

Vedlegg: Formelark

a) $X \sim Exp(\lambda)$ med intensitet $\lambda > 0$, hvis fordelingsfunksjonen F til X er gitt ved

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x},\ x \geq 0.$$

b) $N \sim Pois(\lambda)$, hvis

$$P(N = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!},\ k = 0, 1, ...$$

c) Likelihood-funksjon:

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} f(W_i)$$

for $i.i.d$ W_i stokastiske variabler med tetthetsfunksjon f til W_1.

d) Panjer-formel:

$$p_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda \cdot i}{n} \cdot P(X_1 = i) \cdot p_{n-i},\ n \geq 1,$$

hvor $p_n := P(S = n)$ med begynnelsesverdi p_0

$$p_0 = \begin{cases} P(N = 0) & \text{hvis } P(X_1 = 0) = 0 \\ E[(P(X_1 = 0))^N] & \text{ellers} \end{cases}$$

e) mixture distribution:

$$P(Y_1 = x) = p_1 P(X_1^{(1)} = x) + p_2 P(X_1^{(2)} = x)$$

med

$$p_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \lambda_2},\ i = 1, 2.$$

f)

$$_k p_x = p_x p_{x+1} \cdot ... \cdot p_{x+k-1}$$

g)

$$P(K = j) = {}_j p_x \cdot q_{x+j}$$

h) rekursjonsformel:

$$_k V + \Pi_k = v \left[c_{k+1} \cdot q_{x+k} + {}_{k+1} V \cdot p_{x+k} \right].$$

i)

$$\mu_{x+t} = -\frac{d}{dt} \log({}_t p_x)$$

j) De Moivre's lov:

$$\mu_{x+t} = \frac{1}{\omega - x - t}, 0 < t < \omega - x$$