UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MA-IN1310 — Differensialligninger
Eksamensdag:	14. juni 2007.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

Betrakt differensialligningen

$$y'(t) = 1 - y(t)^2, \tag{1}$$

a. Anta at $0 < y(0) = \bar{y} < 1$. Finn $\lim_{t\to\infty} y(t)$. (Du trenger *ikke* å løse differensialigningen for å finne denne grensen).
Løsningsforlag: Vi tegner opp grafen til $f(y) = 1 - y^2$, og får at alle løsninger som har $y(0) \in (-1, 1)$ vil ha $\lim_{t\to\infty} y(t) = 1$.

b. Vis at

$$y(t+h) = y(t)+h\left(1 - y(t)^2\right)-h^2\left(1 - y(t)^2\right)y(t)-\frac{h^3}{3}\left(1 - y(\xi)^2\right)\left(1 - 3y(\xi)^2\right),$$

der $\xi \in [t, t+h]$. (Hint: Du kan bruke Taylorrekka til y om t).

(Fortsettes side 2.)

Løsningsforlag: Vi Taylorutvikler y om t,

$$\begin{aligned}
y(t+h) &= y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{2}y''(t) + \frac{h^3}{6}y'''(\xi) \\
&= y(t) + h\left(1 - y(t)^2\right) + \frac{h^2}{2}\frac{d}{dt}\left(1 - y(t)^2\right) + \frac{h^3}{6}\frac{d^2}{dt^2}\left(1 - y(t)^2\right)\Big|_{t=\xi} \\
&= y(t) + h\left(1 - y(t)^2\right) + \frac{h^2}{2}(-2y(t))y'(t) + \frac{h^3}{6}\frac{d}{dt}(-2y(t))y'(t)\Big|_{t=\xi} \\
&= y(t) + h\left(1 - y(t)^2\right) - h^2 y(t)\left(1 - y(t)^2\right) - \frac{h^3}{3}\frac{d}{dt}y(t)(1 - y(t)^2)\Big|_{t=\xi} \\
&= y(t) + h\left(1 - y(t)^2\right) - h^2 y(t)\left(1 - y(t)^2\right) - \frac{h^3}{3}\left(1 - y(\xi)^2\right)\left(1 - 3y(\xi)^2\right).
\end{aligned}$$

c. Vi definerer en metode for å løse (1) numerisk ved

$$y_0 = \bar{y}, \quad y_{n+1} = y_n + h\left(1 - y_n y_{n+1}\right), \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

her er $h < 1$ et lite positivt tall. Vis at dersom $0 < \bar{y} < 1$ så er $y_n < y_{n+1} < 1$ for alle n.
Løsningsforlag: Vi løser for y_{n+1},

$$y_{n+1} = \frac{y_n + h}{1 + hy_n}.$$

Sett $g(y) = (y+h)/(1+hy)$, $g(0) = h$, $g'(y) > 0$ for $y > 0$, og $g(1) = 1$. Derfor blir $y_{n+1} = g(y_n) < 1$ for $y_n < 1$. Vi har også at

$$g(y) = \frac{y+h}{1+hy} > \frac{y+yh}{1+hy} > y\frac{1+h}{1+h} = y.$$

Derfor blir $y_{n+1} = g(y_n) > y_n$.

d. La nå $\tilde{y}$ være en løsning av (1) slik at $\tilde{y}(nh) = y_n$. Vis at denne metoden har en lokal trunkeringsfeil av 3. orden, altså at

$$|\tilde{y}((n+1)h) - y_{n+1}| \leq Ch^3,$$

for en konstant C.
Løsningsforlag: Vi har allerede at

$$\tilde{y}((n+1)h) = y_n + h(1 - y_n^2) - h^2\left(1 - y_n^2\right)y_n - \frac{h^3}{3}\left(1 - \tilde{y}(\xi)^2\right)\left(1 - 3\tilde{y}(\xi)^2\right).$$

Videre er $0 < \tilde{y} < 1$, slik at koeffisienten til h^3 over er begrenset av 1.

(Fortsettes side 3.)

Nå har vi at

$$
\begin{aligned}
|y_{n+1} - \tilde{y}((n+1)h)| &= \left| \frac{y_n + h}{1 + hy_n} - y_n + h(1 - y_n^2) - h^2 \left(1 - y_n^2\right) y_n \right| \\
&\quad + \mathcal{O}(h^3) \\
&= \frac{1}{1 + hy_n} \left| y_n + h - (1 + hy_n) \left(y_n + h(1 - y_n^2) - h^2 \left(1 - y_n^2\right) y_n\right) \right| \\
&\quad + \mathcal{O}(h^3) \\
&\leq \left| y_n + h - (y_n + h(1 - y_n^2) - h^2(1 - y_n^2)y_n + hy_n^2 + h^2 y_n(1 - y_n^2)) \right| \\
&\quad + \mathcal{O}(h^3) \\
&= \mathcal{O}(h^3).
\end{aligned}
$$

Siden $0 < y_n < 1$ har jeg ikke tatt med ledd av tredje orden i h.

e. Finn den generelle løsningen på (1), når vi har $y(0) = \bar{y}$.
Løsningsforlag: Vi husker at

$$\frac{d}{dy} \tanh^{-1}(y) = \frac{1}{1 - y^2}.$$

Ved separasjon får vi at

$$\int_{\bar{y}}^{y} \frac{dy}{1 - y^2} = \int_0^t dt.$$

Altså

$$\tanh^{-1}(y) - \tanh^{-1}(\bar{y}) = t,$$

eller

$$y(t) = \tanh\left(t + \tanh^{-1}(\bar{y})\right).$$

Hvis vi bruker delbrøkoppspalting ender vi opp med den alternative formelen

$$y(t) = \frac{(1 + \bar{y})e^{2t} - (1 - \bar{y})}{(1 + \bar{y})e^{2t} + (1 - \bar{y})}.$$

Oppgave 2.

La B være en $n \times n$ matrise og sett $A = kI + B$ der k er et reellt tall.

a. Vis at

$$e^{tA} = e^{kt} e^{tB}.$$

(Fortsettes side 4.)

Løsningsforlag: Sett $\Phi(t) = e^{kt}e^{tB}$, siden $e^{0B} = I$ blir $\Phi(0) = I$. Videre

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Phi(t) &= ke^{kt}e^{tB} + e^{kt}Be^{tB} \\ &= (kI + B)e^{kt}e^{tB} \\ &= A\Phi(t).\end{aligned}$$

Vi har at e^{tA} er definert som (den entydige) løsningen på denne ligningen, så derfor må $\Phi(t) = e^{tA}$.

Oppgave 3.

a. Finn alle likevektspunktene for systemet av differensialligninger

$$\begin{aligned}x' &= y - x \\ y' &= (x-1)(y-2).\end{aligned} \tag{2}$$

Finn også typen til likevektspunktene (f.eks. *stabil spiral, sadelpunkt, kilde osv., og hvis relevant, rotasjonsretning*).
Løsningsforlag: Likevektspunktene blir

$$(1,1) \text{ og } (2,2).$$

Vi har at Jacobimatrisen blir

$$df = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ y-2 & x-1 \end{pmatrix}.$$

Setter vi inn $x = y = 1$ får vi

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

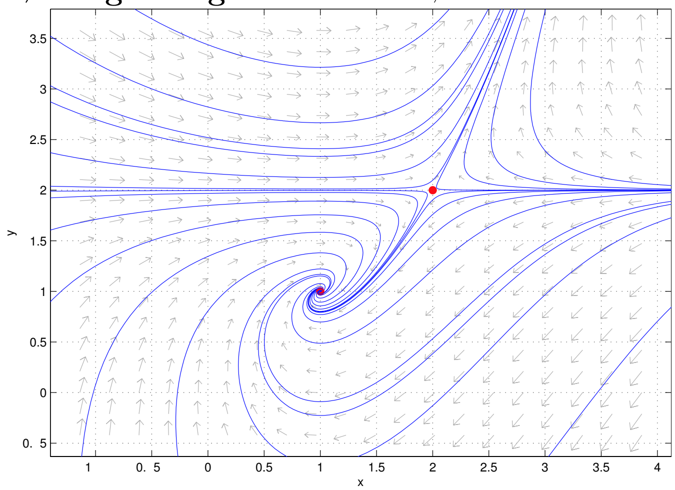
Altå blir $(1,1)$ en stabil spiral, rotasjonsreting får vi ved å se på f.eks. $df_{1,2} = 1 > 0$, altså går vi med klokka. Setter vi $x = y = 2$ blir Jacobimatrisen

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}.$$

Derfor blir $(2,2)$ et sadelpunkt. Egenvektor til $\lambda = 1$ blir $(1,0)$ og egenvektor til $\lambda = 1$ blir $(1,2)$. Dette trenger vi for å tegne faseportrett.

(Fortsettes side 5.)

b. Skissér et faseportrett for (2). Faseportrettet skal inkludere alle likevektspunktene og inneholde mange løsningskurver.
Løsningsforlag: Her er et forsøk



SLUTT