UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT-INF2360 — Anvendelser av lineær algebra
Eksamensdag:	Torsdag 7. juni 2012
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Godkjent kalkulator

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamenssettet inneholder 12 deloppgaver, og alle deloppgaver teller like mye.

Oppgave 1 Lyd og filtre

1a

Forklar hva koden nedenfor gjør, linje for linje:

```
[S,fs]=wavread('castanets.wav');
S=S(:,1);
N=length(S);
newS=zeros(N,1);
for k=2:(N-1)
  newS(k)=2*S(k+1) + 4*S(k) + 2*S(k-1);
end
newS(1)=2*S(2) + 4*S(1) + 2*S(N);
newS(N)=2*S(1) + 4*S(N) + 2*S(N-1);
newS=newS/max(abs(newS));
playerobj=audioplayer(newS,fs);
playblocking(playerobj)
```

Kommenter spesielt hva som skjer i de tre linjene rett etter `for`-loopen, og hvorfor vi gjør dette. Hva slags endringer i lyden forventer du å høre?

1b

Skriv ned filteret som blir brukt i koden over ved hjelp av kompakt filternotasjon, og skriv ned en 5×5 sirkulant Toeplitz matrise som svarer til dette filteret. Plott (den kontinuerlige) frekvensresponsen. Er filteret et lavpass- eller høypassfilter?

(Fortsettes på side 2.)

1c

Et annet filter er gitt ved den sirkulante Toeplitz matrisen

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Uttrykk en sammenheng mellom frekvensresponsene til dette filteret og filteret fra oppgave (b). Er det nye filteret et lavpass- eller høypassfilter?

Oppgave 2 DFT

I denne oppgaven går, som i kompendiet, indeksene i en vektor fra 0 til $N-1$, der N er lengden til vektoren. $N \times N$-Fouriermatrisen betegner vi med F_N.

2a

Vi har en reell vektor $\boldsymbol{x}$ med lengde 8, der $(F_8(\boldsymbol{x}))_2 = 2 - i$ (det vil si at komponent 2 i $F_8(\boldsymbol{x})$ er $2 - i$). Hva blir $(F_8(\boldsymbol{x}))_6$? Begrunn svaret.

2b

La $\boldsymbol{x}$ være vektoren av lengde N der $x_k = \cos(2\pi 5k/N)$, og $\boldsymbol{y}$ vektoren av lengde N der $y_k = \sin(2\pi 7k/N)$. Hva blir da $F_N\,(2\boldsymbol{x} + 3\boldsymbol{y})$? Begrunn svaret.

Oppgave 3 Wavelets

I denne oppgaven skal vi la $\phi(t)$ være funksjonen vi brukte da vi definerte Haar-waveleten, det vil si funksjonen som er 1 på $[0, 1)$, og 0 ellers. Vi minner om basisen $\boldsymbol{\phi}_m = \{\phi_{m,0}, \phi_{m,1}, \ldots, \phi_{m,2^m N-1}\}$ for rommet V_m, der $\phi_{m,n} = 2^{m/2}\phi(2^m t - n)$. Vi skal sette $N = 1$, slik at V_0 har dimensjon 1, V_1 dimensjon 2, V_2 dimensjon 4, o.s.v.. Vi minner også om at funksjonen ψ er definert på $[0, N)$ ved å være 1 på $[0, 1/2)$, -1 på $[1/2, 1)$, og 0 ellers. Vi har også basisen $\boldsymbol{\psi}_m = \{\psi_{m,0}, \psi_{m,1}, \ldots, \psi_{m,2^m N-1}\}$ for rommet W_m, der $\psi_{m,n} = 2^{m/2}\psi(2^m t - n)$. For funksjonen vi ser på bruker vi indreproduktet

$$\langle f, g\rangle = \int_0^N f(t)g(t)\,dt.$$

I de to første deloppgavene skal vi se på funksjonen $f(t) = t$.

3a

Forklar hvorfor $\phi_{m,n}(t) \neq 0$ kun for $t \in [2^{-m}n, 2^{-m}(n+1)]$. Regn ut $\langle f, \phi_{m,n}\rangle$, og bruk dette til å plotte $\mathrm{proj}_{V_1} f$.

3b

Regn ut $\langle f, \psi_{m,n}\rangle$ for alle m, n, og vis at $\lim_{m\to\infty}\langle f, \psi_{m,n}\rangle = 0$ for alle n.

(Fortsettes på side 3.)

3c

Anta at vi har vektoren $\boldsymbol{x}$ med lengde $2^{10} = 1024$ definert ved $x_n = 1$ for $0 \leq n \leq 511$, mens $x_n = 0$ for alle andre verdier av n. Hva blir resultatet hvis du kjører en DWT med Haar-waveleten over 10 nivåer ("m-level DWT") på $\boldsymbol{x}$?

Oppgave 4 Bilder

Anta at `FFTImpl` og `IFFTImpl` er implementasjoner av algoritmene for FFT og invers FFT. Anta at vi har et bilde gitt ved matrisen `X`. Vi skal se på følgende Matlab-kode:

```
threshold=30;
for k=1:2
  for s=1:size(X,2)
    X(:,s)=FFTImpl(X(:,s));
  end
  X=X';
end
X=X.*(abs(X)>=threshold);
for k=1:2
  for s=1:size(X,2)
    X(:,s)=IFFTImpl(X(:,s));
  end
  X=X';
end
```

Kommenter hva koden gjør. Kommenter spesielt betydningen av parameteren `threshold`, og hvilken effekt koden har på bildet.

Oppgave 5 Konveksitet

La f og g begge være to ganger (kontinerlig) deriverbare funksjoner definert på $\mathbb{R}$. Anta videre at f og g er konvekse, og f er voksende. Vis at $h(x) = f(g(x))$ er konveks.
Hint: Regn ut den andrederiverte til $h(x)$, og se på fortegnet til denne.

Oppgave 6 Ikkelineær optimering

Vi skal se på følgende optimeringsproblem.

$$\min\{x_1^2 + x_2^2 : x_1 + x_2 \geq 2\}.$$

6a

Skriv opp KKT-betingelsene for problemet, og finn minimum ved å løse disse likningene.

(Fortsettes på side 4.)

6b

Skriv opp barrierfunksjonen for dette problemet, og vis at løsningen på barrierproblemet med parameter μ er $\boldsymbol{x}(\mu) = \left(\frac{1+\sqrt{1+\mu}}{2}, \frac{1+\sqrt{1+\mu}}{2}\right)$. Konvergerer løsningen på barrierproblemet når $\mu \to 0$ mot løsningen du fant i (a)?

SLUTT