I dag: Sek 2.3 – 2.4

Fra 2.2:

Eksempel 2.19

Anta: $\vec{x} = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_7)$

og anta at $F_8 \vec{x} = (1,2,3,4,5,6,7,8)$

Anta at $\vec{z}$ er gitt ved $z_k = \underbrace{e^{2\pi i 2k/8}}_{d=2} x_k$.

Hva er $F_8 \vec{z}$?

Vi bruker egenskap 4 med $d=2$:

gange $\vec{x}$ med $e^{2\pi i dk/N} \Rightarrow$ forsinke $F_8 \vec{x}$ med d

forsinker vi $F_8 \vec{x}$ med 2 får vi $\underline{\underline{(7,8,1,2,3,4,5,6)}}$

↑ periodisk.

$x_n = x_{N-n}$ $\quad n=0: \quad x_0 = x_{N-0} = x_N = x_0$ <u>per def.</u>

N partall: $n = \frac{N}{2}: \quad x_{\frac{N}{2}} = x_{N-\frac{N}{2}} = x_{\frac{N}{2}}$

Sek. 2.3

Fra torsdag: sammenheng mellom DFT-indeks n og frekvens ν: $\nu = \frac{n f_s}{N}$

Vi skriver $f_M(t) = \sum_{n=-M}^{M} z_n e^{2\pi i n t/T}$ for M'te ordens Fourierrekke.

Vi ser at både z_n og z_{-n} angir bidrag fra frekvens $\underline{\underline{\frac{n}{T}}}$ $(e^{2\pi i \nu t})$

M: angir størrelse Fourierrom

N: Dim DFT

Fra prop. 2.21: Kan finne $f \in V_{M,T}$ fra samplene, så lenge $N > 2M \iff \underbrace{\frac{N}{T}}_{f_s} > 2 \underbrace{\frac{M}{T}}_{\text{angir høyeste frekvens } |\nu|} = 2|\nu|$

(siden frek. til $e^{2\pi i n t/T}$ er $\frac{n}{T}$)

Bevis: $x_k = f(kT/N) = \sum_{n=-M}^{M} z_n e^{2\pi i n k/N}$

$$= \sum_{n=0}^{M} z_n e^{2\pi i n k/N} + \sum_{n=-M}^{-1} z_n e^{2\pi i n k/N}$$

$$\overset{u = n+N}{=} \sum_{n=0}^{M} z_n e^{2\pi i n k/N} + \sum_{n=N-M}^{N-1} z_{n-N} e^{2\pi i (n-N)k/N}$$

$$= \sum_{n=0}^{M} z_n e^{2\pi i n k/N} + \sum_{n=M+1}^{N-M-1} 0 \cdot e^{2\pi i n k/N} + \sum_{n=N-M}^{N-1} z_{n-N} e^{2\pi i (n-N)k/N}$$

kjenner igjen komponentformen for IDFT: $x_k = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{2\pi i n k/N}$;

med $(y_0, \dots, y_{N-1}) = (z_0, \dots, z_M, \overbrace{0, \dots, 0}^{N-(2M+1)}, z_{-M}, \dots, z_{-1})$

La oss skrive opp en formel for å rekonstruere f fra sine sampler $f(kT/N)$:

Har vist: $(z_0,\dots,z_M,0,\dots,0,z_{-M},\dots,z_{-1}) = \frac{1}{N}\mathrm{DFT}_N \vec{x}$

$$f(t) = \sum_{n=-M}^{M} z_n e^{2\pi i n t/T}$$

$z_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-2\pi i k n/N}$ gjelder også for negative n.

$$= \frac{1}{N}\sum_{n=-M}^{M} \sum_{k=-M}^{M} \overset{f(kT_s)}{\overset{\shortparallel}{x_k}} e^{-2\pi i n k/N} e^{2\pi i n t/T}$$

bytter sum. rekkefølge.

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=-M}^{M} \underbrace{\sum_{n=-M}^{M} e^{2\pi i n(t/T-k/N)}}_{\substack{\text{geometrisk rekke}\\ \text{med } k=2\pi i(t/T-k/N)}} f(kT_s)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=-M}^{M} e^{-2\pi i M(t/T-k/N)} \frac{1-\left(e^{2\pi i(t/T-k/N)}\right)^{2M+1}}{1-e^{2\pi i(t/T-k/N)}} f(kT_s)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=-M}^{M} e^{-2\pi i M(t/T-k/N)} e^{\pi i(t/T-k/N)(2M+1)} e^{-\pi i(t/T-k/N)} \cdot \frac{\sin(\pi(t/T-\frac{k}{N})(2M+1))}{\sin(\pi(t/T-k/N))} f(kT_s)$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=-M}^{M} \frac{\sin(\pi(2M+1)(t/T-k/N))}{\sin(\pi(t/T-\frac{k}{N}))} f(kT_s) \quad \blacksquare$$