Kap. 3: Filtre

Vi viser at $\vec{z}$, utgangen fra filteret, er periodisk når $\vec{x}$ er det:

$$z_{n+N} = \frac{1}{4}\left(x_{n+N-1} + 2x_{n+N} + x_{n+N+1}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(x_{n-1} + 2x_n + x_{N+1}\right)$$
$$= z_n \quad \blacksquare$$

første rad i matrisen (S) for filteret
/andre

$$z_0 = \frac{1}{4}\left(x_{-1} + 2x_0 + x_1\right) = \frac{1}{4}\left(\underline{2}x_0 + \underline{1}\cdot x_1 + \cdots\cdots + \underline{1}\cdot \overset{x_{-1}}{\overset{\parallel}{x_{N-1}}}\right)$$

$$z_1 = \frac{1}{4}\left(x_0 + 2x_1 + x_2\right) = \frac{1}{4}\left(\underline{1}\cdot x_0 + \underline{2}x_1 + \underline{1}\cdot x_2 + \cdots 0\right)$$

Ser at første rad blir $\frac{1}{4}(2,1,0,\dots,0,1)$

andre rad: $\frac{1}{4}(1,2,1,0,\dots,0)$

siste rad:

$$z_{N-1} = \frac{1}{4}\left(x_{N-2} + 2x_{N-1} + x_N\right) = \frac{1}{4}\left(1\cdot x_0 + 0 + \dots + 0 + x_{n-2} + 2x_{n-1}\right)$$

siste rad blir da $\frac{1}{4}(1,0,\dots,0,1,2)$.

Hvis filterkoeffisientene er $\ldots, t_{-2}, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, \ldots$, så er første søyle i matrisen S:

$$\begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ t_{-2} \\ t_{-1} \end{pmatrix}$$

Eksempel 3.4: Hvis
$$\begin{array}{l} t_0 \rightarrow \\ t_1 \rightarrow \\ \\ t_{-1} \rightarrow \end{array} S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Viser at $t_0 = 2$, $t_1 = 3$, $t_{-1} = 1$

Filteret kan da skrives:

$$z_n = \sum_{k=-1}^{1} t_k x_{n-k} = \underbrace{1 \cdot x_{n-(-1)}}_{k=-1} + \underbrace{2 \cdot x_n}_{k=0} + \underbrace{3 \cdot x_{n-1}}_{k=1} = \underline{\underline{x_{n+1} + 2x_n + 3x_{n-1}}}$$

Dere gjør oppg. 3.1, der dere skriver ned matrisen utfra at filteret er gitt ved at $z_n = \frac{1}{4}x_{n+1} + \frac{1}{4}x_n + \frac{1}{4}x_{n-1} + \frac{1}{4}x_{n-2}$.
$(N = 8)$

første søyle i S blir: $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$t_k x_{n-k}$

$k = -1$: $t_{-1} x_{n+1}$
$$t_{-1} = \frac{1}{4}$$

Eksempel 3.6 for $z_n = \frac{1}{4}(x_{n+1} + 2x_n + x_{n-1})$ fikk vi $t_1 = t_{-1} = \frac{1}{4}$, $t_0 = \frac{1}{2}$,

og dermed $S = \{\overset{t_{-1}}{\frac{1}{4}}, \underline{\overset{t_0}{\frac{1}{2}}}, \overset{t_1}{\frac{1}{4}}\}$

For filteret $z_n = \underset{t_{-1}}{x_{n+1}} + \underset{t_0}{2x_0} + \underset{t_1}{3x_{n-1}}$ fra eks. 3.4 har vi

$S = \{1, \underline{2}, 3\}$

Siden ϕ_n er egenvektorer så er $(A = PDP^T)$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_0, \dots, \phi_{N-1} \end{pmatrix}}_{F_N^H} \begin{pmatrix} \lambda_{S,0} & 0 & & \\ 0 & \lambda_{S,1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{S,N-1} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} \phi_0, \dots, \phi_{N-1} \end{pmatrix}^H}_{F_N}$$

$\Rightarrow$ Et filter kan skrives som $A = F_N^H D F_N$

Anta at vi har to filtre S_1, S_2, og skriv $S_1 = F_N^H D_1 F_N$, $S_2 = F_N^H D_2 F_N$

Da blir $S_1 S_2 = F_N^H D_1 \underbrace{F_N F_N^H}_{I} D_2 F_N = F_N^H D_1 D_2 F_N$

$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \shortparallel$$

$S_2 S_1 = F_N^H D_2 \underbrace{F_N F_N^H}_{I} D_1 F_N = F_N^H D_2 D_1 F_N$

Tidsforsinkelse

La E_d være et tidsforsinkelsesfilter, det vil at $\vec{x} \to \vec{z}$ der $z_n = x_{n-d}$

Er dette virkelig et filter?

$$(S\phi_n)_k = (\phi_n)_{k-d} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i (k-d)n/N} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{N}} e^{-2\pi i d n/N}}_{\substack{\text{konstant} \\ \text{uavhengig av } k.}} \underbrace{e^{2\pi i k n/N}}_{\text{egenvektor}}$$

Spesielt er da, for ethvert filter S, $SE_d = E_d S$

$$\underbrace{SE_d \vec{x}}_{\vec{z}} = \underbrace{E_d \underbrace{S\vec{x}}_{\vec{y}}}_{\vec{w}} \quad (S\vec{z} = \vec{w})$$

Har vist at alle filtere er tidsinvariante.

Bevis for teorem 3.13

$1 \to 3$ er bevist over

$3 \to 2$ Vi har at $E_d \vec{e}_0 = \vec{e}_d$

Vi anta at $SE_d = E_d S$, og har da at $SE_d \vec{e}_0 = E_d S \vec{e}_0$

$$\underbrace{S\vec{e}_d}_{\text{søyle } d \text{ i } \vec{S}} = E_d \overset{\text{første søyle i } \vec{S}}{\vec{S}}$$

Dette sier at søyle d i S fås ved å forsinke søyle 0 i S med d elementer, og dette er det samme som at S er sirkulant Toeplitz.

$2 \to 1$: En sirkulant Toeplitz-matrise S kan skrives som $\sum_{d=0}^{N-1} s_d E_d$ der s_d er verdiene på hver diagonal. Siden E_d er et filter, og siden summer av filtre også er filtre, følger det at S også er et filter.