Sek. 3.4 Eksempler på filtre.

eks. 3.30 Tidsforsinkelsesfiltre: $d \to$

$$S = \{\underline{0}, \ldots, 0, \underbrace{1}_{d}\}$$

Har her at $\lambda_S(\omega) = 1 \cdot e^{-i\overset{\overset{k}{\shortparallel}}{d}\omega} \Rightarrow |\lambda_S(\omega)| = 1$

eks. 3.32 har at $t_0 = 1$ $t_d = c$

(siden $z_n = x_n + c x_{n-d}$)

$\lambda_S(\omega) = 1 + c e^{-id\omega}$ ($|\lambda_S(\omega)|$ oscillerer da mellom $1+c$ og $1-c$)

Eksempel 3.33.

$S = \{ \frac{1}{3}, \underline{\frac{1}{3}}, \frac{1}{3} \} = \frac{1}{3}\{1, \underline{1}, 1\}$ glidende middel filter

mer generelt: $\frac{1}{2L+1}\{\underbrace{1, \dots, \underline{1}, \dots, 1}_{2L+1 \text{ stk.}}\}$

slike filtre reduserer høye frekvenser.

Vi har altså $t_k = \frac{1}{2L+1}$ for $k = -L, \dots, L$

$\Rightarrow S_0 = \dots = S_L = \frac{1}{2L+1}, \dots S_{N-L} = \dots = S_{N-1} = \frac{1}{2L+1}$

Fra eksempel 2.15 har vi at:

$$DFT_N(\underbrace{1, \dots, 1}_{L+1}, 0, \dots, 0, \underbrace{1, \dots, 1}_{L}) = \frac{\sin(\pi n(2L+1)/N)}{\sin \pi n/N}$$

siden $\vec{s} = \frac{1}{2L+1}(1, \dots, 1, 0, \dots, 0, 1, \dots, 1)$ så får vi at:

$$\vec{\lambda}_s = DFT_N \vec{s} = \frac{1}{2L+1} \frac{\sin(\pi n(2L+1)/N)}{\sin(\pi n/N)}$$

det vil si at $\lambda_s(\omega) \overset{\omega = 2\pi n/N}{=} \frac{1}{2L+1} \frac{\sin(\omega(2L+1)/2)}{\sin(\omega/2)}$.

Eksempel 3.35 Ideelle lavpassfilter.

Vi setter $\vec{\lambda}_s = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{L+1}, 0, \ldots, 0, \underbrace{1, \ldots, 1}_{L})$

Vi har $\vec{s} = IDFT_N \vec{\lambda}_s$

Fra eks. 2.15 har vi da også at

$$\vec{s} = \frac{1}{N} \frac{\sin(\pi k(2L+1)/N)}{\sin(\pi k/N)} = t_k \text{ for } k \geq 0$$

Ser at filterkoeffisientene ligger på kurven

$$\frac{1}{N} \frac{\sin(\pi t(2L+1))}{\sin(\pi t)}, \quad t = k/N, \quad 0 \leq t < 1$$

eks 3.36 Hva skjer om vi dropper noen av disse filterkoeffisientene, og bare bruker

$$\left\{ \frac{1}{N} \frac{\sin(\pi k(2L+1)/N)}{\sin(\pi k/N)} \right\}_{k=-N_0}^{N_0} \quad (t_{-N_0}, \ldots, t_{N_0})$$

Eks. 3.38 For å redusere høye frekvenser så kan vi prøve å midle sampler slik at "midterste" sample teller mest. feks $\{\frac{1}{4}, \underline{\frac{1}{2}}, \frac{1}{4}\}$ i stedet for $\{\frac{1}{3}, \underline{\frac{1}{3}}, \frac{1}{3}\}$

Vi skal så på når vi bruker verdier fra Pascals trekant

$\frac{1}{4}\{1, \underline{2}, 1\}$

$t_0 = t_1 = \frac{1}{2}$

La oss se på filteret S definert ved $z_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_n)$

$\lambda_S(\omega) = \frac{1}{2}(1 + e^{-i\omega})$

Vi har at $\lambda_{S^n}(\omega) = (\lambda_S(\omega))^n = \frac{1}{2^n}(1 + e^{-i\omega})^n$, der koeffisientene er tatt fra Pascals trekant)

(ganger vi at $(x+y)^n$ så vil koeffisientene til alle $x^k y^{n-k}$ utgjøre en rad i Pascals trekant)

$\lambda_{S^n}(\omega) = \frac{1}{2^n} e^{-i\frac{\omega}{2}n}(e^{i\omega/2} + e^{-i\omega/2})^n = e^{-i\omega n/2}\cos^n(\omega/2)$

$\Rightarrow |\lambda_{S^n}(\omega)| = |\cos^n \frac{\omega}{2}|$. Denne blir flatere og flatere nær 0.

Observasjon 3.40

Anta at S_2 har filterkoeffisienter $(-1)^k t_k$, der t_k er filterkoeffisientene til S_1. $(-1 = e^{-i\pi})$

Vi får da at
$$\lambda_{S_2}(\omega) = \sum_k (-1)^k t_k e^{-ik\omega} = \sum_k (e^{-i\pi})^k t_k e^{-ik\omega}$$
$$= \sum_k e^{-ik\pi} t_k e^{-ik\omega} = \sum_k t_k e^{-ik(\omega+\pi)}$$
$$= \lambda_{S_1}(\omega + \pi)$$

Dette betyr: Hvis S_1 er lavpass $(\lambda_{S_1}(\pi) = 0)$ så er S_2 høypass $(\lambda_{S_2}(0) = 0)$