Det viktigste fra kap. 1

Fourierrommen $V_{N,T}$

utspent av $D_{N,T} = \{1, \{\cos(2\pi nt/T)\}_{n=1}^{N}, \{\sin 2\pi nt/T\}_{n=1}^{N}\}$

og $F_{N,T} = \{e^{2\pi i nt/T}\}_{n=-N}^{N}$

indreprodukt: $\langle f, g\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\overline{g(t)}\,dt$

Hvis $f_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} y_n e^{2\pi i nt/T} = \sum_{n=0}^{N} a_n \cos\frac{2\pi nt}{T} + \sum_{n=1}^{N} b_n \sin\frac{2\pi nt}{T}$

kalles y_n for (kompleks) Fourierkoeffs, a_n, b_n (reelle) Fourierkoeffs.

$y_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{-2\pi i nt/T}\,dt$ $\quad \begin{cases} a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(2\pi nt/T)\,dt \\ b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(2\pi nt/T)\,dt \end{cases}$

$= \langle f, e^{2\pi i nt/T}\rangle$

$f_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} \langle f, e^{2\pi i nt/T}\rangle e^{2\pi i nt/T}$

Ikke alltid vi trenger å regne ut Fourierintegralene:

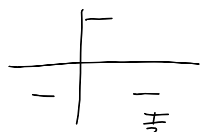
so feks. på $f(t) = \cos^3(2\pi t/T)$

$= \left(\frac{1}{2}\left(e^{2\pi i t/T} + e^{-2\pi i t/T}\right)\right)^3$

$= \underbrace{\frac{1}{8}}_{y_3} e^{2\pi i 3t/T} + \underbrace{\frac{3}{8}}_{y_1} e^{2\pi i t/T} + \underbrace{\frac{3}{8}}_{y_{-1}} e^{-2\pi i t/T} + \underbrace{\frac{1}{8}}_{y_{-3}} e^{2\pi i 3t/3}$

Four firkantpulsen må vi regne ut Fourierintegralene:

$f_s(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < \frac{T}{2} \\ -1 & \frac{T}{2} \le t < T \end{cases}$



$a_n = 0$

$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f_s(t)\sin(2\pi nt/T)\,dt = \frac{2}{T}\left(\int_0^{T/2} \sin(2\pi nt/T) - \int_{T/2}^{T} \sin(2\pi nt/T)\,dt\right)$

$= \dots$

Hvis vi hører på en firkantpuls med $T = \frac{1}{440}$ ($\nu = 440\,Hz$), så hører vi "litt av" den rene tonen $\sin(2\pi t/440)$

Egenskaper ved Fourierrekker:

Hvis f er en reell funksjon $\Rightarrow$ $y_n = \overline{y_{-n}}$

Hvis $f \to y_n$, og $g(t) = f(t-d)$, så har vi $g \to e^{-2\pi i n d/T} y_n$

$g(t) = e^{2\pi i d t/T} f(t)$, $g \to y_{n-d}$

Kapittel 2 Digital lyd

funksjoner i matlab/python: audioread, audiowrite, play (playblocking)

Vi definerte ϕ_n som vektoren med komponenter $\frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i k n/N}$

$\mathcal{F}_N = \{\phi_n\}_{n=0}^{N-1}$ N-punkts Fourierbasis. Ortonormal.

indreprodukt: $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \overline{y_k}$

F_N (Fouriermatrisen): Koordinatskiftematrisen fra standardbasisen $(\vec{e}_0, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_{N-1})$ til Fourierbasisen.

$(F_N)_{k,n} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-2\pi i k n/N}$. F_N er unitær: $F_N^H F_N = I$

$DFT_N = \sqrt{N} F_N$ $\vec{y} = DFT_N \vec{x} \Rightarrow y_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-2\pi i k n/N}$

$x_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{2\pi i k n/N}$

DFT-koeffisient.

Sammenheng DFT-indeks n og frekvens ν:

$e^{2\pi i \nu t} = e^{2\pi i \nu \frac{k}{f_s}}$ $t = \frac{k}{N} T = k T_s = \frac{k}{f_s}$

$e^{2\pi i k n/N}$ $2\pi i \nu \frac{k}{f_s} = 2\pi i k n/N \Leftrightarrow \frac{\nu}{f_s} = \frac{n}{N}$

$\Rightarrow \nu = \frac{n f_s}{N}$, $n = \frac{N\nu}{f_s}$

Egenskaper ved DFT:

$\vec{x}$ reell: $\overline{y_{N-n}} = y_n$

$\vec{x} \to \vec{y}$ ($\vec{y} = DFT_N \vec{x}$): $x_{n-d} \longrightarrow e^{-2\pi i d n/N} y_n$

$e^{2\pi i k d/N} x_n \longrightarrow y_{n-d}$

Husk at $F_N \phi_n = \vec{e}_n$, siden F_N er def. som et koordinatskifte.

Da kan vi også regne ut feks. $F_N(\cos 2\pi k/N)$:

$= F_N\left(\frac{1}{2}\left(e^{2\pi i k/N} + e^{-2\pi i k/N}\right)\right) = \frac{\sqrt{N}}{2}\left(F_N\left(\frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i k/N}\right) + F_N\left(\underbrace{\frac{1}{\sqrt{N}} e^{-2\pi i k/N}}_{\frac{1}{\sqrt{N}} e^{2\pi i (N-1)k/N}}\right)\right)$

$= \frac{\sqrt{N}}{2}\left(F_N \phi_1 + F_N(\phi_{N-1})\right) = \frac{\sqrt{N}}{2}\left(\vec{e}_1 + \vec{e}_{N-1}\right)$

$= \underline{\frac{\sqrt{N}}{2}(0, 1, 0, \ldots, 0, 1)}$

Andre ting:

1. Bruk av DFT for kompresjon.
2. Samplingsteoremet.
3. FFT

Filtre (kap. 3)

Tre karakteriseringer av filtre:

1. $S = F_N^H D F_N$, $\vec{\lambda}_s$
2. S sirkulant Toeplitz
3. S tidsinvariant.

Det vi må kunne gjøre med filtre:

1. Regne ut utgangen fra et filter:

feks: $S\cos(2\pi k/N) = S\left(\frac{1}{2}\left(e^{2\pi i k/N} + e^{-2\pi i k/N}\right)\right)$

$= S\left(\frac{1}{2}e^{2\pi i k/N} + e^{2\pi i (N-1)k/N}\right)$

$= \frac{1}{2}\lambda_{S,1}\underbrace{e^{2\pi i k/N}}_{\sqrt{N}\phi_1} + \frac{1}{2}\lambda_{S,N-1}\underbrace{e^{2\pi i (N-1)k/N}}_{\sqrt{N}\phi_{N-1}}$

2. Kunne finne matrisen til filteret fra filterkoeffisientene, og omvendt

$\underbrace{z_n}_{\text{lengde } N} = \sum_k t_k \underbrace{x_{n-k}}_{\text{lengde } N}$

$\vec{s} = \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ t_{-2} \\ t_{-1} \end{pmatrix}$

3. For filtre så kan egenverdiene finnes ved hjelp av en DFT: $\vec{\lambda}_s = DFT_N \vec{s}$
4. Plotte frekvensrespons, og avgjøre om filteret er et lavpass eller høypassfilter.
5. Hvordan finne filterkoeffisientene til $S_1 S_2$, ut fra filterkoeffisientene til S_1 og S_2
6. Eksempler på filtre:
   a) ekko
   b) Glidende middel
   c) Filterkoeffs. fra Pascals trekant
   d) Ideelle lavpassfiltre.