Del II (kap. 5, 6, 9, 10) (kap 7,8 ikke pensum)

Del I: Vi tilnærmet ved hjelp av trigonometriske funksjoner ($\cos(2\pi i n t/T)$, $\sin(2\pi i n t/T)$, $e^{2\pi i n t/T}$)

Problemet: Bare passende for å representere funksjoner med et fast frekvensinnhold, dvs der frekvenser ikke varierer over tid.
Ikke passende hvis frekvenser varierer over tid

Vi vil nå tilnærme med funksjoner som er lokalisert i tid (og delvis også i frekvens)

Vil først i kap. 5 (5.1 - 5.3) bruke stykkevis konstante funksjoner.

Vi vil tilnærme over forskjellige "resolusjoner" (oppløsninger), der du får stadig bedre tilnærminger ed å legge til mer detaljer fra "høyere resolusjoner". (Multiresolusjonsanalyse)

$\{\phi_n\}_{n=0}^{N-1}$ er ortogonale:

Anta $n_1 \neq n_2$

$$\langle \phi_{n_1}, \phi_{n_2} \rangle = \int_0^N \underbrace{\phi_{n_1}(t)}_{\neq 0 \text{ på } [n_1, n_1+1)} \underbrace{\phi_{n_2}(t)}_{\neq 0 \text{ på } [n_2, n_2+1)} dt = \int_0^N 0 \, dt = 0$$

bevis: H $f(t)$ er stykkevis konstant, så blir

$$f(t) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \phi_k(t).$$

sett inn $t = n$: $f(n) = \sum_{k=0}^{N-1} f(k) \underbrace{\phi_k(n)}_{0 \text{ for } k \neq n} = f(n)\phi_n(n) = f(n)$

$\phi_{m,n}$ er ortogonale, og har norm 1:

$$\int_0^N \phi_{m,n}(t)\,\phi_{m,n}(t)\,dt = \langle \phi_{m,n}, \phi_{m,n} \rangle$$

$$= \int_0^N 2^{m/2}\phi(2^m t - n)\, 2^{m/2}\, \phi(2^m t - n)\, dt$$

$$= 2^m \int_{0 \to n2^{-m}}^{N \to (n+1)2^{-m}} \left(\phi(2^m t - n)\right)^2 dt \qquad u = 2^m t - n, \quad dt = 2^{-m}\, du \quad \Bigg|\; 2^m \int_{n2^{-m}}^{(n+1)2^{-m}} \left(\phi(2^m t - n)\right)^2 dt$$

$$= 2^m \int_0^1 2^{-m} (\phi(u))^2\, du = \int_0^1 (\phi(u))^2\, du = 1$$

$\phi_{m,n} \neq 0$ bare på $[n2^{-m}, (n+1)2^{-m})$

$$\phi_{m,n} \neq 0 \iff \phi(2^m t - n) \neq 0 \iff 0 \leq 2^m t - n < 1$$

$$n \leq 2^m t \leq n+1$$

$$n2^{-m} \leq t \leq (n+1)2^{-m}$$

Dermed er $\phi_{m,n_1} \phi_{m,n_2} = 0$ for $n_1 \neq n_2$,

siden $[n_1 2^{-m}, (n_1+1)2^{-m})$ og $[n_2 2^{-m}, (n_2+1)2^{-m})$ er disjunkte.

$\Rightarrow$ ϕ_{m,n_1} og ϕ_{m,n_2} er ortogonale

Vi har at $[n, n+1) = [n, n+\frac{1}{2}) \cup [n+\frac{1}{2}, n+1)$

$= [2n2^{-1}, (2n+1)2^{-1}) \cup [(2n+1)2^{-1}, (2n+2)2^{-1})$

Siden $\phi_{m,n} \neq 0$ bare på $[n2^{-m}, (n+1)2^{-m})$:

$\phi_{1,2n} \neq 0$ bare på $[2n2^{-1}, (2n+1)2^{-1})$

$\phi_{1,2n+1} \neq 0$ bare på $[(2n+1)2^{-1}, (2n+2)2^{-1})$

$\Rightarrow \underline{\phi_{0,n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,2n} + \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,2n+1}} \Rightarrow V_0 \subset V_1$

På samme måte kan du vise at:

$\underline{\phi_{m-1,n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{m,2n} + \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{m,2n+1}} \Rightarrow V_{m-1} \subset V_m$

$V_m = V_{m-1} \oplus W_{m-1} \longrightarrow$ definert som "direkte sum".

$$y = \underbrace{\text{proj}_{V_{m-1}} y}_{V_{m-1}} + \underbrace{(y - \text{proj}_{V_{m-1}} y)}_{W_{m-1}}$$

Hvis V og W er to rom, som er ortogonale $\langle v, w \rangle = 0$ alle $v \in V$, $w \in W$

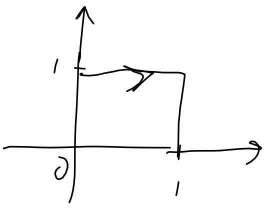
vi skriver $V \oplus W$ for vektorrommet som består av alle $v + w$, der $v \in V$, $w \in W$.

(enhver $x \in V \oplus W$ kan skrives unikt på formen $v + w$.

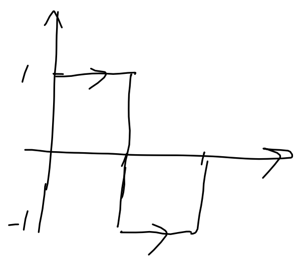
hvis $v_1 + w_1 = v_2 + w_2 \Rightarrow v_1 - v_2 = w_1 - w_2$

$\Rightarrow v_1 - v_2 = w_1 - w_2 = 0$

$\phi(t)$



$\psi(t)$



Bevis for Lemma 5.11:

anta at n er partall. Vi skal regne ut $\mathrm{proj}_{V_0}(\phi_{1,n})$

$$\mathrm{proj}_{V_0}\phi_{1,n} = \sum_{n_1=0}^{N-1} \langle \phi_{1,n}, \phi_{0,n_1}\rangle \phi_{0,n_1}$$

når er "supportene" til $\phi_{1,n}$ og ϕ_{0,n_1} inneholdt i hverandre?

$\phi_{1,n} \neq 0$ kun på $[n2^{-1}, (n+1)2^{-1})$ $\rightarrow$ $[n_1, n_1+\frac{1}{2})$

$\phi_{0,n_1} \neq 0$ kun på $[n_1, n_1+1)$

skjer kun når $n = 2n_1$
$n_1 = n/2$

$$\sum_{n_1=0}^{N-1} \langle \phi_{1,n}, \phi_{0,n_1}\rangle \phi_{0,n_1} = \underbrace{\langle \phi_{1,n}, \phi_{0,n/2}\rangle}_{} \phi_{0,n/2}$$

$$\int_0^N \phi_{1,n}\phi_{0,n/2}\,dt = \int_{n/2}^{n/2+\frac{1}{2}} \sqrt{2}\cdot 1\,dt\ \phi_{0,n/2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\phi_{0,n/2} = \frac{\phi_{0,n/2}}{\sqrt{2}}$$

$$\mathrm{proj}_{W_0}\phi_{1,n} = \phi_{1,n} - \mathrm{proj}_{V_0}\phi_{1,n}$$

$$= \phi_{1,n} - \frac{\phi_{0,n/2}}{\sqrt{2}} = \phi_{1,n} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,n} + \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,n+1}\right)$$

$$= \phi_{1,n} - \frac{1}{2}\phi_{1,n} - \frac{1}{2}\phi_{1,n+1}$$

$$= \frac{1}{2}\phi_{1,n} - \frac{1}{2}\phi_{1,n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,n} - \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,n+1}\right)$$

$$\overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{0,n/2}$$