Eks 5.18

Hva blir DWT av $[\underbrace{1,\dots,1}_{512},\underbrace{0,\dots,0}_{512}]$

over 10 steg (levels)?

Som funksjon i rommet V_{10}:

$2^{m/2}$ utenfor $= 2^5 = 32$

$$\sum_{n=0}^{511} \phi_{10,n} = 32 \sum_{n=0}^{511} \underbrace{\phi(2^{10}t - n)}_{\neq 0 \text{ kun på } [n2^{-10},\ (n+1)2^{-10})}$$

$= 32 \cdot$ funksjonen som er 1 på $[0, \frac{1}{2})$, 0 ellers

$= 32 \cdot \frac{\phi_{1,0}}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow$ funksjonen vår kan skrives:

$$\frac{32}{\sqrt{2}}\phi_{1,0} = \frac{32}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{0,0} + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_{0,0}\right)$$

$$= 16\,\phi_{0,0} + 16\,\psi_{0,0}$$

$\Rightarrow \mathrm{DWT}(1,\dots,1,0,\dots,0) = (16, 16, 0, \dots, 0)$

Eks 5.21

Sett $f(t) = 1 - \frac{t}{N}$.

Man kan regne ut $\text{proj}_{W_m} f$, $\text{proj}_{V_m} f$ for hånd:

ortogonalt dekomp. ~~teorem~~.

$$\text{proj}_{V_m} f = \sum_{\substack{m' < n \\ n}} \langle f, \psi_{m',n} \rangle \psi_{m,n} + \sum_n \langle f, \phi_{0,n} \rangle \phi_{0,n}$$

$$\langle f, \psi_{m,n} \rangle = \int_0^N f(t)\, \psi_{m,n}(t)\, dt$$

$$= \int_{n2^{-m}}^{(n+1)2^{-m}} \left(1 - \frac{t}{N}\right) \psi_{m,n}(t)\, dt$$

$$= \int_{n2^{-m}}^{(n+\frac{1}{2})2^{-m}} \left(1 - \frac{t}{n}\right) 2^{m/2}\, dt - \int_{(n+\frac{1}{2})2^{-m}}^{(n+1)2^{-m}} \left(1 - \frac{t}{N}\right) 2^{\frac{m}{2}}\, dt$$

$$= \cdots = \underline{\frac{1}{N 2^{2+3m/2}}}$$

Bevis for lemma 5.23

$f \in V_m$ er unikt bestemt av verdiene $f(n2^{-m})$, $0 \leq n < N2^m$

Vi ser på $L_m : V_m \to (f(0 \cdot 2^{-m}), f(1 \cdot 2^{-m}), \ldots)$.

Denne er 1-1.

Videre er: $L_0(\phi_{0,n}) = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n\text{'te plass}}, 0, 0, \ldots, 0)$

Dermed blir $\{\phi_{0,n}\}$ en basis for V_0, siden $\{e_i\}_{i=0}^{N}$ er en basis for $\mathbb{R}^N$.

$\{\phi_{0,n}\}_{n=0}^{N-1}$ utspenner hele V_0, siden begge har dimensjon N.

Bevis for lemma 5.26

$$\phi_{0,n} = \sum_{n'} \phi_{0,n}(n'/2)\, 2^{-\frac{1}{2}} \phi_{1,n'}(t)$$

(lemma 5.24 med $f = \phi_{0,n}$, $m = 1$)

$\phi_{0,n}(n'/2) = 0$, ~~bortsett~~ fra for

$n' = 2n \to 1$

$n' = 2n-1 \quad \phi_{0,n}\left(\frac{2n-1}{2}\right) = \phi_{0,n}(n - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

$n' = 2n+1 \quad \phi_{0,n}\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \phi_{0,n}(n + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$

$$\phi_{0,n} = \underbrace{\frac{1}{2} 2^{-\frac{1}{2}}}_{n'=2n-1} \phi_{1,2n-1} + \underbrace{1 \cdot 2^{-\frac{1}{2}}}_{n'=2n} \phi_{1,2n} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 2^{-\frac{1}{2}}}_{n'=2n+1} \phi_{1,2n+1}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\phi_{0,n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\phi_{1,2n-1} + \phi_{1,2n} + \frac{1}{2}\phi_{1,2n+1}\right)}}$$

Bevis for lemma 5.29:

Vi definerer, for $g_1 \in V_1$, $g_0 = P(g_1)$

Definerer så $e_0 = g_1 - g_0$ $\quad (g_1 - P(g_1))$.

Da er $e_0(n) = g_1(n) - g_0(n) = 0$, siden g_0, g_1 har de samme verdiene i heltallene

$\Rightarrow e_0 \in W_0 \Rightarrow$ punkt 1 er OK

punkt 2: $\psi_{0,n}$ utgjør en basis for W_0:

$$\psi_{0,n}(t) \overset{\text{def}}{=} \psi(t-n) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,1}(t-n) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\,\phi(2(t-n)-1)$$

$$= \phi(2t-(2n+1)) = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,2n+1}$$

Det er klart at alle $\phi_{1,2n+1} \in W_0$ (siden de er 0 i heltallene), og disse er lineært uavhengige (siden er er delmengde av $\{\phi_{1,n}\}$), og de utspenner da hele W_0, siden W_0 har dimensjon N, og $\{\psi_{0,n}\}$ har samme dimensjon.

Punkt 3: Anta at $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_{0,n}(t) + \sum_{n=0}^{N-1} b_n \psi_{0,n}(t) = 0$

sett inn $t = n$:

$\phi_{0,k}(n) = 0$ for $k \neq n$, $\psi_{0,k}(n) = 0$ alle k

$\Rightarrow a_n \cdot \phi_{0,n}(n) = \underline{a_n = 0}$

Men da må $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} b_n \psi_{0,n}(t) = 0$

$\Rightarrow b_n = 0$ (siden vi vet at $\psi_{0,n}$ er lin. uavh.)

$e_0 = g_1 - g_0 \Rightarrow g_1 = g_0 + e_0 = \underline{\underline{P(g_1) + e_0}}$