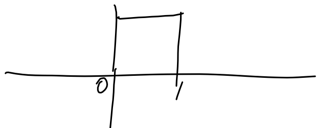
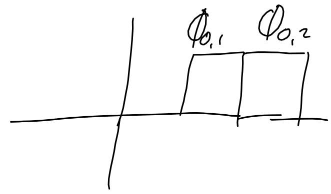
Repetisjon fra del II

Hva var en MRA $\quad V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_m \subset \cdots$

V_m (Løsresoluksjonsrom) utspent av $\phi_{m,n} = 2^{m/2}\phi(2^m t - n)$

for stykkevis konstante

$\phi(t) =$  $\quad \phi_{0,1}, \phi_{0,2}:$ 

$\phi_{m,n}$ er lik $2^{m/2}$ på $[n2^{-m}, (n+1)2^{-m})$, og 0 ellers.

W_{m-1}: ortogonalkomplementet til V_{m-1} i V_m

$W_{m-1} \oplus V_{m-1} = V_m$

Vi regner ut $\mathrm{proj}_{V_0}(\underbrace{\phi_{1,0}}_{V_1}) = \sum_n \underbrace{\langle \phi_{1,0}, \phi_{0,n} \rangle}_{\neq 0 \text{ kun for } n=0} \phi_{0,n}$ ort. dekomp. teorem

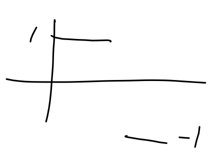
(indreprodukt: $\langle f, g \rangle = \int_0^N f(t)g(t)\,dt$)
dimensjon $N2^m$

$= \underbrace{\langle \phi_{1,0}, \phi_{0,0} \rangle}_{\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{2} \cdot 1\, dt = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}} \phi_{0,0}$

$\mathrm{proj}_{V_0}(\phi_{1,0}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \underset{\phi}{\phi_{0,0}}$

$\mathrm{proj}_{W_0}(\phi_{1,0}) = \underbrace{\phi_{1,0}}_{\sqrt{2} \text{ på } [0,\frac{1}{2}]} - \overbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \phi_{0,0} = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{for } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} & \text{for } \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \psi$

ψ 

Derfor: $\phi_{1,0} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \phi_{0,0}}_{\mathrm{proj}_{V_0}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \psi_{0,0}}_{\mathrm{proj}_{W_0}}$

DWT-matrisen har derfor $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$ på diagonalen

gange $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ med $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$: regner ut sum og differanse.

To ting som man må kunne regne ut.

1. Regne ut wavelet-koeffisientene analytisk (for f).

$\text{proj}_{V_m} f$ detaljkoeffisientene. $\langle f, \phi_{0,n}\rangle = \ldots$

$\langle f, \phi_{m,n}\rangle$

$$\langle f, \psi_{m,n}\rangle = \int_0^N f(t)\,\psi_{m,n}(t)\,dt$$

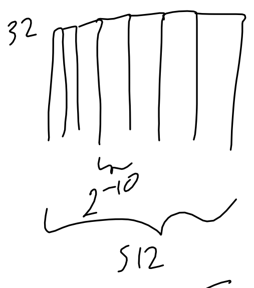
$$= 2^{\frac{m}{2}} \int_{n2^{-m}}^{(n+1)2^{-m}} f(t)\cdot(1 \text{ eller } -1)\,dt$$

$$= 2^{\frac{m}{2}}\left(\int_{n2^{-m}}^{(n+\frac{1}{2})2^{-m}} f(t)\,dt - \int_{(n+\frac{1}{2})2^{-m}}^{(n+1)2^{-m}} f(t)\,dt\right)$$

2. Regne ut DWT for en konkret vektor: $(2,2,..2,0,..0,0)$

DWT over 10 nivåer av $(\underbrace{1,\ldots,1}_{512},\underbrace{0,\ldots,0}_{512}) \rightarrow \underbrace{2^{10/2}}_{32}\phi(2^{10}t-n)$

dette er koordinatvektoren for $\sum_{n=0}^{511} \underbrace{\phi_{10,n}}_{\neq 0 \text{ på intervall av lengde } 2^{-m} = \frac{1}{2^{10}}}$



$\Rightarrow$ bredde $512\cdot 2^{-10} = \frac{1}{2}$

Derfor: funksjonen er $\begin{cases} 32 & \text{for } 0 \le t < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$

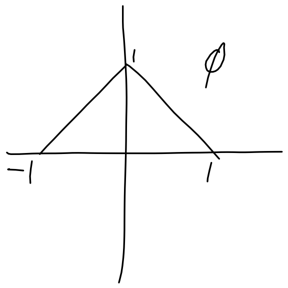
$\phi_{1,0}$ har høyde $\sqrt{2}$ på $[0,\frac{1}{2})$, og elles.

$\Rightarrow$ funksjonen er $32\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,0} = \frac{32}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_{0,0}+\psi_{0,0})$

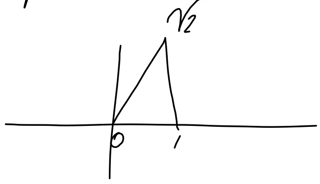
$= 16\,\phi_{0,0} + 16\,\psi_{0,0}$

Stykkevis lineære wavelets

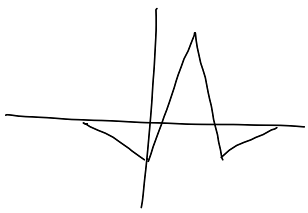
Φ_1 og (Φ_0, Ψ_0) utspenner samme rom.



ψ



$\hat{\psi}$



Hvordan lese ut filtrene H_0, H_1 fra en DWT?

H_0: filteret som har samme første rad som DWT-matrisen

H_1: ——— // ——— andre ——— // ———

DWT for Haar-wavelet: $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ 1 & -1 & & \\ & & 1 & 1 \\ 0 & & 1 & -1 \end{pmatrix}$ → gir H_0 → gir H_0

$$H_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad H_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$H_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\{1, \underline{1}\} \qquad H_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\underline{-1}, 1\}$$

G_0: Filteret som har samme første søyle som IDWT

G_1: ——— // ——— andre ——— // ———

For Haar wavelet: $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & -1 & & \vdots \\ & 0 & 1 & 1 \\ & & 1 & -1 \\ & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$

$$G_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & \cdots \\ 1 & \\ 0 & \cdots \\ \vdots & \\ 0 & \cdots \end{pmatrix} \qquad G_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 1 & \cdots \\ 0 & -1 & \cdots \\ \vdots & 0 & \\ 0 & \vdots & \ddots \\ 1 & 0 & \cdots \end{pmatrix}$$

$$G_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\{\underline{1}, 1\} \qquad G_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\{1, \underline{-1}\}$$

$$\lambda_{G_0}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + e^{-i\omega}\right) \qquad \lambda_{G_1}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{i\omega} - 1\right)$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Def av tensorprodukt av (søyle-)vektorer: $\underset{M}{\vec{x}} \otimes \underset{N}{\vec{y}} = \vec{x}\, y^T$ $M \times N$

tensorprodukt av lineære trans:

$$(S_1 \otimes S_2)(\vec{x} \otimes \vec{y}) = (S_1 \vec{x}) \otimes (S_2 \vec{y})$$

(anvend S_1 på søylene, S_2 på radene)

Formelen $X \to S_1 X (S_2)^T$ dukker opp tre steder:

1. $S_1 \otimes S_2$ anvendt på et bilde X $\left((S_1 \otimes S_2) X = S_1 X (S_2)^T \right)$
2. Koordinatskifte i et tensorprodukt.
3. DWT2 (trenger også tensorprodukt av funksjoner)
   (her er $S_1 = S_2 = DWT$)