Del III

La $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$B(\vec{x}^*, \varepsilon) = \{\vec{x} \mid \|\vec{x}^* - \vec{x}\| < \varepsilon\}$

$\bar{B}(\vec{x}^*, \varepsilon) = \{\vec{x} \mid \|\vec{x}^* - \vec{x}\| \leq \varepsilon\}$

Vil finne minimum for f

I optimering så kalles f ofte for objektivfunksjonen.

$\vec{x}^*$ kalles lokalt minimum for f hvis det finnes en $\varepsilon > 0$

s.a. $f(\vec{x}^*) \leq f(\vec{x})$ for alle $\vec{x} \in B(\vec{x}^*, \varepsilon)$

$\vec{x}^*$ globalt min: $f(\vec{x}^*) \leq f(\vec{x})$ alle $\vec{x}$

Oppførsel nær $\vec{x}^*$: Vi ser på Taylorrekka til f.

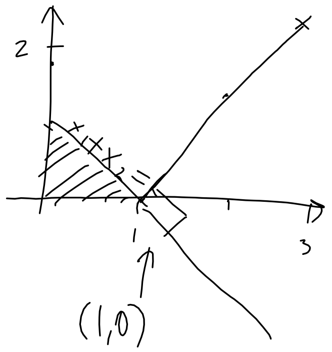
---

eks 1.1 Ofte kan vi finne minimum uten regning:

$f(\vec{x}) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \quad (f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$

tilleggsbetingelser: $x_1 + x_2 \leq 1$

$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0$



f: kvadratet av avstanden til $(3,2)$

min $f \iff$ min avstand til $(3,2)$

siden normalen fra $(3,2)$ ned på linjen $x_1 + x_1 = 2$ treffer i punktet $(1,0)$, så må dette være et minimum.

Tidligere teoremer på optimering:

teorem 1.2 f har minimum og maksimum hvis f er kontinuerlig, og definisjonsområdet er lukket og begrenset.

eks 1.2.1 porteføljeoptimering:

$$\min \ \alpha \sum_{i,j \le n} C_{ij} x_i x_j - \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j$$

j = aksje

x_j = andel av portefølje investert i aksje j

$0 \le x_j$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$$

R_j = avkastning aksje j

$\mu_j = \mathbb{E}(R_j)$ forventet avkastning aksje j.

forventet avkastning portefølje:

$$\mathbb{E}(x_1 R_1 + \dots + x_n R_n) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j x_j$$

C_{ij} = kovarians mellom aksje i og j

def. ved $\mathbb{E}((R_i - \mu_i)(R_j - \mu_j)) = \mathbb{E}(R_i R_j) - \mu_i \mu_j$

Eks. 1.2.3 Maximum likelihood.

Vi vet at en en randomvariabel har en sannsynlighetsfordeling, men ikke hvilken parameter α denne følger.

La $\{x_i\}_{i=1}^n$ være n uavhengige målinger av en random variabel.

Disse har fordeling $\prod p(x_i;\alpha)$

maximum likelihood: Velg en α som maksimerer $\prod p(x_i;\alpha)$

$$\text{maks} \prod p(x_i;\alpha) \iff \text{maks} \ln\left(\prod_i p(x_i;\alpha)\right) = \text{maks} \sum_i \ln(p(x_i;\alpha))$$

$$\Updownarrow$$

$$\min -\sum_i \ln(p(x_i;\alpha))$$

i boka: $p(x;\alpha) = \frac{1+\alpha x}{2} \Rightarrow \min -\sum_i \ln\left(\frac{1+\alpha x_i}{2}\right)$

Lineær optimering: minimer $\vec{c}^T\vec{x}$ $\quad \vec{c}, \vec{b}, A$ gitte

bet: $A\vec{x} = \vec{b}$, $\vec{x} \geq 0$

Seksjon 1.3

A reell, symmetrisk. Da kan vi skrive

$A = PDP^T$, der P er ortogonal, D diagonal.

$\vec{x}^T A \vec{x} \geq 0$ alle $\vec{x}$: A positiv definit / semidefinit

$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ gradienten til f

$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial_j}\right)_{i,j}$: Hessematrisen til f (symmetrisk) $\nabla^2 f$

La $\vec{F}$ være en vektorvaluert funksjon:

$$F(\vec{x}) = \begin{bmatrix} F_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ F_n(\vec{x}) \end{bmatrix} \qquad \vec{F}'(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$ Jacobimatrisen til $\vec{F}$.

Teorem 1.4 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, f har kont. part. der i $B(\vec{x}; r)$ for $\vec{h}$ med $\|\vec{h}\| < r$, så finnes en $t \in (0,1)$ slik at

$$f(\vec{x} + \vec{h}) = f(\vec{x}) + \nabla f(\underbrace{\vec{x} + t\vec{h}}_{\vec{c}})^T \vec{h}$$

Teorem 1.5 f kont. andreordens part. der, så finnes $t \in (0,1)$ slik at

$$f(\vec{x} + \vec{h}) = f(\vec{x}) + \nabla f(\vec{x})^T \vec{h} + \frac{1}{2}\vec{h}^T \nabla^2 f(\underbrace{\vec{x} + t\vec{h}}_{\vec{c}})\vec{h}$$

Teorem 1.6 Samme betingelser:

$$f(\vec{x} + \vec{h}) = f(\vec{x}) + \nabla f(\vec{x})^T \vec{h} + \frac{1}{2}\vec{h}^T \nabla^2 f(\vec{x})\vec{h} + \varepsilon(h)\|\vec{h}\|^2$$

der $\vec{\varepsilon}(\vec{h}) \to 0$ når $\vec{h} \to 0$

Teorem 1.7: $\vec{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, kont. deriverbar i en ball om $\vec{x}$

$$\vec{F}(\vec{x} + \vec{h}) = F(\vec{x}) + \vec{F}'(\vec{x})\vec{h} + \underbrace{O(\|h\|)}_{\approx \|h\|}$$

---

lineær konvergens: $x_k \to x^*$: $\|x_{k+1} - x^*\| \leq \gamma \|x_k - x^*\|$, $\gamma < 1$

superlineær konvergens: $\lim_{k \to \infty} \frac{\|x_{k+1} - x^*\|}{\|x_k - x^*\|} = 0$

kvadratisk konvergens: $\|x_{k+1} - x^*\| \leq \gamma \|x_k - x^*\|^2$, $\gamma < 1$