Kap. 2 Konveksitet $\lambda\vec{x} + (1-\lambda)\vec{y}$

$C \subseteq \mathbb{R}$ konveks $\underbrace{(1-\lambda)\vec{x} + \lambda\vec{y}}_{\text{linjestykket mellom } \vec{x} \text{ og } \vec{y}} \in C$ når $\vec{x}, \vec{y} \in C$, $\lambda \in [0,1]$

konveks kombinasjon av $\vec{x}$ og $\vec{y}$

$B(\vec{a}, \delta)$ er konveks:

Bevis: anta $\vec{x}, \vec{y} \in B(\vec{a}, \delta)$ $\quad (\|\vec{x}-\vec{a}\| < \delta,\ \|\vec{y}-\vec{a}\| < \delta)$

$$\|((1-\lambda)\vec{x} + \lambda\vec{y}) - \vec{a}\| = \|\underline{(1-\lambda)\vec{x}} + \underline{\underline{\lambda\vec{y}}} - (\underline{(1-\lambda)\vec{a}} + \underline{\underline{\lambda\vec{a}}})\|$$

$$= \|(1-\lambda)(\vec{x}-\vec{a}) + \lambda(\vec{y}-\vec{a})\|$$

trekant

$$\leq (1-\lambda)\|\vec{x}-\vec{a}\| + \lambda\|\vec{y}-\vec{a}\| < (1-\lambda)\delta + \lambda\delta = \delta \quad \blacksquare$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)\vec{x} + \lambda\vec{y} \in B(\vec{a}, \delta).$$

Lineære rom er konvekse. (konveks. komb. er også en lineær komb.)

prop. 2.1 polyedret definert ved $\{ x \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} \leq \vec{b} \}$ er konvekst.

lineært system komponentvis.

Bevis: Anta $A\vec{x} \leq \vec{b}$, og $A\vec{y} \leq \vec{b}$

Da er $A((1-\lambda)\vec{x} + \lambda\vec{y}) = (1-\lambda)A\vec{x} + \lambda A\vec{y} \leq (1-\lambda)\vec{b} + \lambda\vec{b} = \vec{b}$

$\Rightarrow (1-\lambda)\vec{x} + \lambda\vec{y}$ ligger også i polyedret.

$\left(x = a \Leftrightarrow \quad x \leq a \longleftrightarrow \begin{matrix} x \geq a \\ -x \leq -a \end{matrix} \right)$

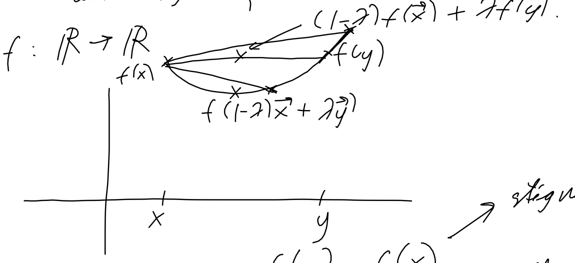
sek 2.2

f konveks funksjon (definert på $C \subseteq \mathbb{R}^n$ og konveks) hvis

$$f((1-\lambda)\vec{x} + \lambda\vec{y}) \leq (1-\lambda)f(\vec{x}) + \lambda f(\vec{y})$$

alle $\vec{x}, \vec{y} \in C$, $\lambda \in [0,1]$. Linjen gjennom $f(\vec{x})$ og $f(\vec{y})$

Spesielt: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



Da vil også $y \to \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$ → stigningstallet til sekanten. vil være voksende i y når f er konveks.

---

eksempler på konvekse funksjoner:

1. Lineære funksjoner, affine funksjoner: (likhet gjelder.)

$f(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{b}$

$f((1-\lambda)\vec{x} + \lambda\vec{y})$
$= A((1-\lambda)\vec{x} + \lambda\vec{y}) + \vec{b}$
$= (1-\lambda)A\vec{x} + \lambda A\vec{y} + (1-\lambda)\vec{b} + \lambda\vec{b}$
$= (1-\lambda)(A\vec{x}+\vec{b}) + \lambda(A\vec{y}+\vec{b}) = (1-\lambda)f(\vec{x}) + \lambda f(\vec{y})$

2. $f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|$ konveks

3. $f(\vec{x}) = e^{\sum_{j=1}^{n} x_j}$

4. $f(\vec{x}) = e^{h(\vec{x})}$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ er konveks.

} regn på

Bevis for 2.: $\|(1-\lambda)\vec{x} + \lambda\vec{y}\| \leq (1-\lambda)\|\vec{x}\| + \lambda\|\vec{y}\|$
$f((1-\lambda)\vec{x} + \lambda\vec{y}) \leq (1-\lambda)f(\vec{x}) + \lambda f(\vec{y})$.

beviset for 3. henger sammen med:
prop 2.3: Hvis f er konveks og H er affin, så er $f(H(\vec{x}))$ også konveks. } regn på

$f(\vec{x}) = e^{h(\vec{x})}$ er konveks:

$$f((1-\lambda)\vec{x} + \lambda\vec{y}) = e^{h((1-\lambda)\vec{x} + \lambda\vec{y})}$$

h konveks: $h((1-\lambda)\vec{x} + \lambda\vec{y}) \leq (1-\lambda)h(\vec{x}) + \lambda h(\vec{y})$ →

e^x voksende: $e^{h((1-\lambda)\vec{x} + \lambda\vec{y})} \leq e^{(1-\lambda)h(\vec{x}) + \lambda h(\vec{y})} \leq (1-\lambda)e^{h(\vec{x})} + \lambda e^{h(\vec{y})}$.

---

sett $g(x) = e^x$ g konveks: $g((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)g(\vec{x}) + \lambda g(\vec{y})$

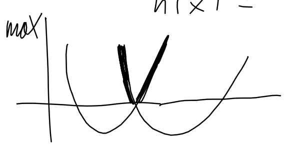
$$e^{(1-\lambda)x + \lambda y} \leq (1-\lambda)e^x + \lambda e^y$$

$x = h(\vec{x})$ $y = h(\vec{y})$ $e^{(1-\lambda)h(\vec{x}) + \lambda h(\vec{y})} \leq (1-\lambda)e^{h(\vec{x})} + \lambda e^{h(\vec{y})}$.

$$\Rightarrow e^{h((1-\lambda)\vec{x} + \lambda\vec{y})} \leq (1-\lambda)e^{h(\vec{x})} + \lambda e^{h(\vec{y})} \Rightarrow \underline{\underline{e^{h(\vec{x})} \text{ konveks}}}$$

hvis f og g er konvekse, så er også

$$h(\vec{x}) = \max\{f(\vec{x}), g(\vec{x})\} \quad \text{konveks.}$$



Teorem 2.4 Hvis f er konveks, $x_j \in C$, $\sum \lambda_j = 1$, $\lambda_j \geq 0$

Da er $f\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j)$

prop 2.5 "sublevel mengder" til konvekse funksjoner f er konv.

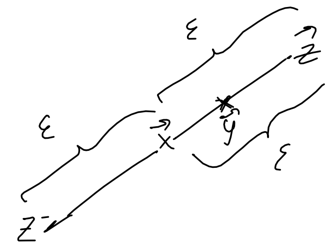
$\{x \in C : f(x) \leq \alpha\}$ konveks mengde når f er det.

Teorem 2.6 Hvis f er konveks på C, åpen, konveks, så er f kontinuerlig på C.

Ikke les beviset i boka

<u>Skisse av beviset:</u> For å vise at f er kont i $\vec{x} \in C$,

Finn en ball $B(\vec{x}, \varepsilon) \subset C$



Trekker et linjestykke fra $\vec{x}$ i begge retninger lengde ε

Ser på funksjonens $\dfrac{f(\vec{y}) - f(\vec{x})}{\|\vec{y} - \vec{x}\|} \leq \dfrac{f(\vec{z}) - f(\vec{x})}{\|\vec{z} - \vec{x}\|}$

stigningstall til sekant →

Teorem 2.7 Anta f er reell, definert på C åpen, konveks
f kont. 2. ordens partielle deriverte.
f konveks $\Leftrightarrow$ $\nabla^2 f$ positivt semidefinit.

Se på eksempel 2.8 i boka:

$$f(x,y) = \frac{x^2}{4} + y^2 \qquad \nabla^2 f = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \text{ positiv definit.}$$

$\Downarrow$
f konveks

Sublevel-mengdene til f er da konvekse:

$$\{(x,y) : f(x,y) < \alpha\} \Leftrightarrow \{(x,y) : \frac{x^2}{4} + y^2 \leq \alpha\}$$

området innenfor ellipsen.

Viktig klasse av konvekse funk: kvadratisk form.

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{2} \vec{x}^T A \vec{x} - \vec{b}^T \vec{x}$$

Oppgave fra kap 1 gir (A symmetrisk): $\nabla f = A\vec{x}$, $\nabla^2 f = A$.

kvadratisk form konveks $\Leftrightarrow$ A pos. semidefinit.

Teorem 2.9 f konveks, C åpen og konveks.
f er deriverbar i $\vec{x}$ når alle $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$ $i = 1, \ldots, n$ eksisterer.

Teorem 2.10 Anta f er deriverbar, def på C, åpen, konveks.
Følgende er ekvivalent:

(i) f er konveks
(ii) $f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0)^T (\vec{x} - \vec{x}_0)$ $\quad \vec{x}_0, \vec{x}$ i C.
(iii) $(\nabla f(\vec{x}) - \nabla f(\vec{x}_0))^T (\vec{x} - \vec{x}_0) \geq 0$ alle $\vec{x}_0, \vec{x}$ i C.