Kap. 3 Ikkelineære likninger.

eksempel:
$$x_1^2 - x_1 x_2^{-3} + \cos x_1 = 1$$
$$5x_1^4 + 2x_1^3 - \tan(x_1 x_2^8) = 3$$

vil skrive på formen $\vec{F}(x_1, x_2) = \vec{0}$ $\quad \vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}$

$\vec{F} = (F_1, F_2)$ $\quad F_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 x_2^{-3} + \cos x_1 - 1$

$F_2(x_1, x_2) = 5x_1^4 + 2x_1^3 - \tan(x_1 x_2^8) - 3$

Lineære likninger: $F(\vec{x}) = A\vec{x} - \vec{b} = \vec{0}$

$F(\vec{x}) = \vec{0} \iff \underline{K(\vec{x})} = \vec{x} - \vec{F}(\vec{x}) = \underline{\vec{x}}$

$\vec{x}$ er fikspunkt for K. Fikspunktiterasjonen: $\vec{x}_{k+1} = K(\vec{x}_k)$

når vil $\vec{x}_k$ konvergere mot et fikspunkt x^*? $(x^* = K(x^*))$

K kontraksjon: $(*)\ \|K(\vec{x}) - K(\vec{y})\| \le c\|\vec{x} - \vec{y}\| \quad 0 \le c < 1$

Teorem 3.1. Anta $(*)$. Da har K et unikt fikspunkt x^*,
og $x_k \to x^*$ (ved iterasjon) for alle startverdier x_0,
og $\|x_{k+1} - x^*\| \le c\|x_k - x^*\|$ (lineær konvergens)
og $\|x_k - x^*\| \le c^k \|x_0 - x^*\|$

Bevis: Anta både $\vec{x}$ og $\vec{y}$ er fikspunkter. Da får vi
$\|\vec{x} - \vec{y}\| = \|K(\vec{x}) - K(\vec{y})\| \le c\|\vec{x} - \vec{y}\|$
hvis $\vec{x} \ne \vec{y}$: Del med $\|\vec{x} - \vec{y}\| \Rightarrow 1 \le c$, motsigelse
Vi har derfor unikt fikspunkt x^*.

$\|\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k\| = \|K(\vec{x}_k) - K(\vec{x}_{k-1})\| \le c\|\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}\| \le \dots \le c^k\|\vec{x}_1 - \vec{x}_0\|$

Derfor: $\|\vec{x}_m - \vec{x}_0\| = \left\|\sum_{k=0}^{m-1}(\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k)\right\| \le \sum_{k=0}^{m-1}\|\vec{x}_{k+1} - \vec{x}_k\|$

$$\le \sum_{k=0}^{m-1} c^k \|\vec{x}_1 - \vec{x}_0\| = \|\vec{x}_1 - \vec{x}_0\| \sum_{k=0}^{m-1} c^k = \|\vec{x}_1 - \vec{x}_0\| \frac{1-c^m}{1-c}$$
$$\le \|\vec{x}_1 - \vec{x}_0\| \frac{1}{1-c}$$

$\|\vec{x}_{s+m} - \vec{x}_s\| \le \dots \le c^s \|\vec{x}_m - \vec{x}_0\| \le \frac{c^s}{1-c}\|\vec{x}_1 - \vec{x}_0\|$

Derfor er $\{\vec{x}_k\}$ en Cauchyfølge.
(Vi kan velge s så stor at $\frac{c^s}{1-c}\|\vec{x}_1 - \vec{x}_0\| < \varepsilon$).

Derfor vil $\vec{x}_k \to \vec{x}^*$.

Viser at $\vec{x}^*$ er fikspunkt:
$\|\vec{x}^* - K(\vec{x}^*)\| = \|(\vec{x}^* - \vec{x}_m) + (\vec{x}_m - K(\vec{x}^*))\| \le \|\vec{x}^* - \vec{x}_m\| + \|\vec{x}_m - K(\vec{x}^*)\|$

$$= \|\vec{x}^* - \vec{x}_m\| + \|K(\vec{x}_{m-1}) - K(\vec{x}^*)\|$$
$$\le \underbrace{\|\vec{x}^* - \vec{x}_m\|}_{\to 0} + c\underbrace{\|\vec{x}_{m-1} - \vec{x}^*\|}_{\to 0}$$

La $m \to \infty$: $\|\vec{x}^* - K(\vec{x}^*)\| \le 0 \qquad \vec{x}^* = K(\vec{x}^*)$.

3.2 Newtons metode. erstatter $\vec{F}$ med førsteordens Taylor i $\vec{x}_k$,
$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}$ finner dennes nullpunkt $\to \vec{x}_{k+1}$

$$\vec{F}(x_k) + \vec{F}'(x_k)(\vec{x} - \vec{x}_k) = \vec{0}$$

$$\vec{F}'(\vec{x}_k)\vec{x} = \vec{F}'(x_k)\vec{x}_k - \vec{F}(x_k)$$

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x} = \vec{x}_k \underbrace{-\left(\vec{F}'(x_k)\right)^{-1}\vec{F}(x_k)}_{\vec{p}} \qquad \left(\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + \vec{p}\right)$$

$\vec{p}$ finnes ved å løse $\vec{F}'(\vec{x}_k)\vec{p} = -F(\vec{x}_k)$.
$\vec{p} = -\left(\vec{F}'(x_k)\right)^{-1} F(\vec{x}_k)$

Newtons metode: Finne fikspunkt for $x_{k+1} = G(\vec{x}_k)$,
$$G(\vec{x}) = \vec{x} - \left(\vec{F}(\vec{x})\right)^{-1}\vec{F}(x)$$

Teorem 3.2: Anta at $x_k \to x^*$ med Newtons metode.
Da er konvergensen <u>superlineær.</u>

<u>Bevis</u>: $0 = F(\vec{x}^*) = \vec{F}(\vec{x}_k + (\vec{x}^* - \vec{x}_k)) =$
$$\vec{F}(\vec{x}_k) + \vec{F}'(x_k)(\vec{x}^* - \vec{x}_k) + O(\|\vec{x}_k - \vec{x}^*\|)$$

ganger med $\vec{F}'(x_k)^{-1}$: $\left(\vec{F}'(\vec{x}_k)\right)^{-1}\vec{F}(x_k) + \vec{x}^* - \vec{x}_k + O(\|x_k - \vec{x}^*\|) = 0$

ganger med -1 $\underbrace{\vec{x}_k - \left(\vec{F}'(x_k)\right)^{-1}\vec{F}(x_k)}_{\vec{x}_{k+1}} - \vec{x}^* = O(\|\vec{x}_k - \vec{x}^*\|)$

$$\vec{x}_{k+1} - \vec{x}^* = \underbrace{O(\|\vec{x}_k - \vec{x}^*\|)}_{c_k \|\vec{x}_k - \vec{x}^*\|} \quad \text{der } c_k \to 0$$

$$\Rightarrow \frac{\|\vec{x}_{k+1} - \vec{x}^*\|}{\|x_k - x^*\|} \to 0$$

Hvor nær x^* må man starte for at Newtons metode skal konvergere?

To krav. Finnes åpen konveks mengde U slik at, og konstanter K, L s.a.

(i) $\|F'(\vec{x}) - F'(\vec{y})\| \leq L\|\vec{x}-\vec{y}\| \quad \vec{x},\vec{y} \in U$

(ii) $\|F'(x_0)\| \leq K \quad$ for en $x_0 \in U$

operatornorm: $\|F'(x_0)\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\|\vec{x}\|=1} \|F'(x_0)\vec{x}\|$

teorem 3.3 Kantorovich' teorem

Anta $\vec{F}$ tilfredsstiller (i) og (ii), og at $\overline{B}(x_0; \frac{1}{KL}) \subset U$,

og at $\|F'(x_0)^{-1} F(\vec{x}_0)\| \leq \frac{1}{2KL}$

Da er $F'(\vec{x})$ inverterbar for alle $\vec{x}$ i

og Newtons metode med start: x_0 produserer x_k i U og $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$

der $F(x^*) = \vec{0}$.

Ulempe med Newtons metode: Må vite $\vec{F}'(\vec{x})$ eksakt.

Alternativ: Tilnærme $\vec{F}'(\vec{x}_k)$ med en matrise B_k (numerisk).

må da løse $B_k p_k = -\vec{F}(x_k)$ istedet for $\vec{F}'(x_k)\, p = -\vec{F}(x_k)$.

Broydens metode: oppdaterer tilnærmingen $B_{k+1} \approx F'(x_{k+1})$ med

$$B_{k+1} = B_k + \left(1/(s_k^T s_k)\right)(y_k - B_k s_k)\, s_k^T$$

der

$$s_k = x_{k+1} - x_k$$

$$y_k = F(\vec{x}_{k+1}) - F(\vec{x}_k)$$

i stedet for $\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{søkeretning}}}{\vec{p}_k}$ velger vi en $\overset{\text{steglengde}}{\alpha_k}$ og definerer

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + \alpha_k \vec{p}_k$$