Teorem 5.2
Anta $f, H$ to ganger deriverbare
og at $x^*$ tilfredsstiller førsteordensbet ($Df(\vec{x})+\dots=0$)
Anta i tillegg
$y^T D^2 L(x^*, \lambda^*)\vec{y} > 0$ alle $y \neq 0$, $H'(x^*)\vec{y} = 0$
Da er $x^*$ et <u>strengt</u> lokalt min.
($f(x^*) < f(x)$ for alle $x$ nær $x^*$)

<u>Bevis</u>: Vi ser på $L_c(x,\lambda) = f(x) + \lambda^T H(\vec{x}) + \frac{c}{2}\|H(x)\|^2$.

---

5.2 min $f(x)$

$h_i(x) = 0 \quad 1 \leq i \leq m \qquad H(\vec{x}) = 0$

$g_j(x) \leq 0 \quad 1 \leq j \leq r \qquad G(\vec{x}) \leq 0$

$G(\vec{x}) = (g_1(\vec{x}), \dots g_r(\vec{x}))$.

Antar $f, h_i, g_j$ alle er kont. deriverbare.

(kan omformuleres: min $f(x)$, $h(x) = 0$, $g_j(x) + z_j^2 = 0$ (nye variable $z_j$))

---

$L(\vec{x}, \lambda, \mu) = f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(\vec{x}) + \sum_{j=1}^r \mu_j g_j(\vec{x})$.

$D_x L(\vec{x}, \lambda, \mu) = Df(\vec{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i Dh_i(\vec{x}) + \sum_{j=1}^r \mu_j Dg_j(\vec{x})$

aktive ulikheter: ulikhetene $j$ der $g_j(x^*) = 0$

$A(x^*) = \{ 1 \leq j \leq r : g_j(x^*) = 0 \}$

$\vec{x}$ regulært: $\{ Dh_i(x^*), \{Dg_j(x^*)\}_{j \in A(x^*)} \}$ lineært uavhengige.

---

Teorem 5.3
(i) Anta $x^*$ lokalt min, og regulært. Finnes da unike $\lambda^*, \mu^*$ s.a.

$$\left.\begin{aligned} &D_x L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = 0 \\ &\mu_j^* \geq 0 \quad \text{alle } j \\ &\mu_j^* = 0 \quad \text{for } j \notin A(x^*) \end{aligned}\right\} (5.12)$$

Hvis $f, g, h$ er to ganger kont. deriverbare:

(5.13) $y^T D_{xx}^2 L(x^*, \lambda^*, \mu^*) y \geq 0$ for alle $\vec{y}$ $\quad Dh_i(\vec{x}^*) \cdot \vec{y} = 0$, $Dg_j(\vec{x}^*) \cdot \vec{y} = 0 \quad j \in A(x^*)$.
$>$ ellers:

(ii) (5.12) og (5.13) holder med ulikhet
da er $x^*$ et strengt lokalt min.

<u>Litt om beviset</u>: Se først på min $f(x)$, $h_i(x) = 0$, $g_j(x) = 0 \quad j \in A(x^*)$. (5.14)

La $x^*$ være min i det opprinnelige problemet.
Påstand at $x^*$ også er min. for problemet (5.14)
Hvis $x^*$ ikke er min for (5.14): Finnes da $x'$ s.a. $f(x') < f(x^*)$,
og der $h_i(x') = 0$, $g_j(x') = 0 \quad j \in A(x^*)$.
siden $g_j(x^*) < 0$ for $j \notin A(x^*)$, så kan vi velge $x'$ slik at også $g_j(x') < 0$
Men da vil $x'$ oppfylle <u>alle</u> betingelser i det opprinnelige problemet
også, og $f(x') < f(x^*)$ ⇒ motsigelse siden $x^*$ min for det opprinnelige problemet.

Anvender teorem 5.1:

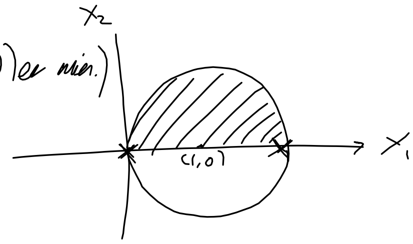
$$Df(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* Dh_i(x^*) + \sum_{j \in A(x^*)} \mu_j^* Dg_j(x^*) + \sum_{j \notin A(x^*)} \overset{0}{\mu_j^*} Dg_j(x^*) = \vec{0}$$

Vanskelig: Hvorfor er $\mu_j^* \geq 0$?

Eksempel 5.4

min { $x_1$ : $x_2 \geq 0$ , $(1-(x_1-1)^2 - x_2^2) \geq 0$ }

(klart at $(0,0)$ er min.)




$Df = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \; Dg_1 = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}, \; Dg_2 = \begin{pmatrix}2(x_1-1)\\2x_2\end{pmatrix}$

$g_1(x_1,x_2) = -x_2 \leq 0$

$g_2(x_1,x_2) = (x_1-1)^2 + x_2^2 - 1 \leq 0$

1. Anta ingen ulikheter er aktive:
Da er $Df = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \vec{0}$, umulig.

2. Bare $g_1$ aktiv:
$Df + \mu_1 Dg_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \mu_1\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-\mu_1\end{pmatrix} \neq 0$, ingen kandidater.

3. Bare $g_2$ aktiv ( $g_1$ ikke aktiv $\Rightarrow x_2 > 0$ )

$$Df + \mu_2 Dg_2 = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \mu_2 \begin{pmatrix}2(x_1-1)\\2x_2\end{pmatrix} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1+2\mu_2(x_1-1)\\2\mu_2 x_2\end{pmatrix} = \vec{0}$$

$\Rightarrow \mu_2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \vec{0}$, umulig, ingen kandidater.

4. Anta begge aktive: $g_1(x_1,x_2) = 0 \Rightarrow x_2 = 0$
$g_2(x_1,x_2) = 0 \Rightarrow (x_1-1)^2 + x_2^2 = 1$
Ser fra figur at $(0,0)$ og $(2,0)$ er eneste mulige.

$$Df + \mu_1 Dg_1 + \mu_2 Dg_2 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \mu_1\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} + \mu_2\begin{pmatrix}2(x_1-1)\\2x_2\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 + \mu_2\cdot(\mp 2)\\ -\mu_1 + 0\end{pmatrix} = \vec{0} = \begin{pmatrix}1 \mp 2\mu_2\\ -\mu_1\end{pmatrix}$$

$\mu_1 = 0$ , $1 \mp 2\mu_2 = 0$ $\mu_2 = \pm\frac{1}{2}$

$\vec{x} = (0,0)$: $\mu_2 = \frac{1}{2}$ , $\vec{x} = (2,0)$, $\mu_2 = -\frac{1}{2}$ (ikke kandidat

eneste kandidat

punkter som ikke er regulære: Kan $Dg_1$, $Dg_2$ være lin. avhengige-

Har alltid at $Dg_1 = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ ingen regulære punkter når bare $g_1$ aktiv.

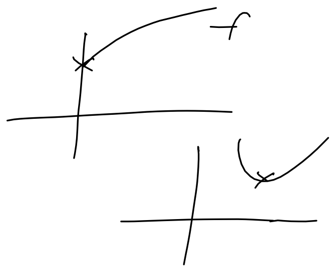
$Dg_2 = 0$ kun når $\begin{pmatrix}2(x_1-1)\\2x_2\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (x_1,x_2) = (1,0)$

$\Rightarrow$ ingen regulære punkter når bare $g_2$ er aktiv. men her er ikke $g_2$ aktiv

når begge er aktive:
$Dg_2 = \begin{pmatrix}\pm 2\\0\end{pmatrix}$ , $Dg_1 = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ , lin. uavh.

$\Rightarrow$ alle punkter er regulære.

eks. 5.8 $\quad \min f(x)$




$x \geq 0$

$g_1(x) = -x \leq 0$

$x > 0$ $\quad Dg_1 = -1$

✓

$g_1$ ikke aktiv: $\quad Df(x^*) = \vec{0} \qquad f'(x^*) = 0$

$x=0$ $g_1$ aktiv: $\quad Df(x^*) + \mu Dg_1(x^*) = 0 \qquad f'(x^*) - \mu = 0 \Rightarrow f'(x^*) = \mu \geq 0$

1. $x^* > 0$, og $f'(x^*) = 0$
2. $x^* = 0 \qquad f'(0) \geq 0$

---

eks 5.9 $\quad \min f(\vec{x})$

$x_i \geq 0 \qquad g_i(x_i) = -x_i \leq 0 \qquad Dg_i = -\vec{e}_i$

$$Df(x^*) + \sum_{j \in A(x^*)} \mu_j Dg_j(x^*) = Df(x^*) - \sum_{j \in A(x^*)} \mu_j \vec{e}_j$$

$$\Rightarrow Df(x^*) = \sum_{j \in A(x^*)} \mu_j \vec{e}_j = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

$x_j \neq 0$

$g_j$ ikke aktiv: $\mu_j = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j} = 0$

$x_j = 0$

$g_j$ aktiv: $\mu_j \geq 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j} \geq 0$