

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT-INF3300-4300 — Partiell
differensialligninger og Sobolev
rom I.

Eksamensdag: Mandag 12. desember 2005.

Tid for eksamen: 09.00 – 12.00.

Oppgavesettet er på 2 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

a) La $\lambda > 0$ være et reellt tall. Finn alle *radialsymmetriske* løsninger av

$$\Delta u + \lambda^2 u = 0 \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (1)$$

Du kan bruke at dersom $u(x) = v(r)$ så er

$$\Delta u = v''(r) + \frac{2}{r}v'(r).$$

b) Vis at

$$\Phi(x) = \frac{\cos(\lambda |x|)}{|x|},$$

er en fundamentalløsning av (1). Altså for $f \in C_c^2(\mathbb{R}^3)$ så er løsningen av $\Delta u - \lambda^2 u = f$ gitt ved

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(x - y) f(y) dy$$

(Fortsettes side 2.)

Du kan bruke at

$$\Delta u = \int_{\mathbb{R}^3 \setminus B(0, \varepsilon)} \Delta \Phi(y) f(x - y) dy - \int_{\partial B(0, \varepsilon)} D\Phi(y) \cdot \nu(y) f(x - y) dS(y) + M(\varepsilon), \quad (2)$$

der $\nu(y)$ er den innoverrettede normalvektoren i $y \in B(0, \varepsilon)$, og $M(\varepsilon) \rightarrow 0$ når $\varepsilon \rightarrow 0$.

c) (Bare hvis du har tid) Vis (2).

Oppgave 2.

La $U \subset \mathbb{R}^n$, og la $m \geq k$.

- Vis at $W^{m,p}(U) \subset W^{k,p}(U)$.
- Vis at denne inklusjonen er en *en kontinuerlig embedding*, dvs. at identitetsavbildningen fra $W^{m,p}(U)$ til $W^{k,p}(U)$ er kontinuerlig.

Oppgave 3.

Sett $U = B^o(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, og la

$$u(x) = \frac{x_1}{|x|}.$$

- Finn de svake deriverte u_{x_i} for $i = 1, \dots, n$ (du skal vise at disse oppfyller betingelsene for svake deriverte).
- For hvilke $p \geq 1$ er $u \in W^{1,p}(U)$?

Oppgave 4.

La $u : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ være gitt ved

$$u(x) = \begin{cases} -x & \text{for } x \leq 0, \\ 1 - x & \text{for } x > 0. \end{cases}$$

Vis at u **ikke** ligger i $W^{1,p}((-1, 1))$ for $1 \leq p < \infty$.

SLUTT